

Wiskunde

Leerjaar 3 - periode 3

Hogere machtsverbanden, gebroken functies, exponentiële functies en logaritmen

Hoofdstuk 2 - Gebroken functies

A. Negatieve exponenten

1. We kennen de volgende machten en hun uitkomsten:

$$\begin{array}{cccc} 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 9 & 27 & 81 & 243 \\ \times 3 & \times 3 & \times 3 & \end{array}$$

Tussen de antwoorden zit steeds een factor 3. Als we nu van rechts naar links zouden gaan, kunnen we de uitkomsten dus steeds delen door 3.

$$\begin{array}{cccc} 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 9 & 27 & 81 & 243 \\ \div 3 & \div 3 & \div 3 & \end{array}$$

Stel dat we deze logica zouden doorzetten naar links. We verlagen de exponent met 1 en delen de uitkomst door 3. Dan wordt dit het resultaat:

$$\begin{array}{cccccccccc} 3^{-3} & 3^{-2} & 3^{-1} & 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 & \div 3 \end{array}$$

Kennelijk kunnen we zeggen dat: $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Maar we weten ook dat $3^2 = 9$.

Als we deze twee regels combineren, krijgen we: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

Hieruit volgt een algemene rekenregel voor negatieve exponenten: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Oefeningen

2. Schrijf de onderstaande uitdrukkingen zonder negatieve exponent.

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

d) $7^{-1} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

b) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

e) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

c) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

f) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

3. Schrijf de onderstaande uitdrukkingen zonder negatieve exponent.

a) $x^{-2} = \frac{1}{\dots\dots}$

d) $1 + x^{-3} = \dots\dots\dots$

b) $x^{-3} = \frac{1}{\dots\dots}$

e) $2x^2 + x^{-5} = \dots\dots\dots$

c) $(x+1)^{-2} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$

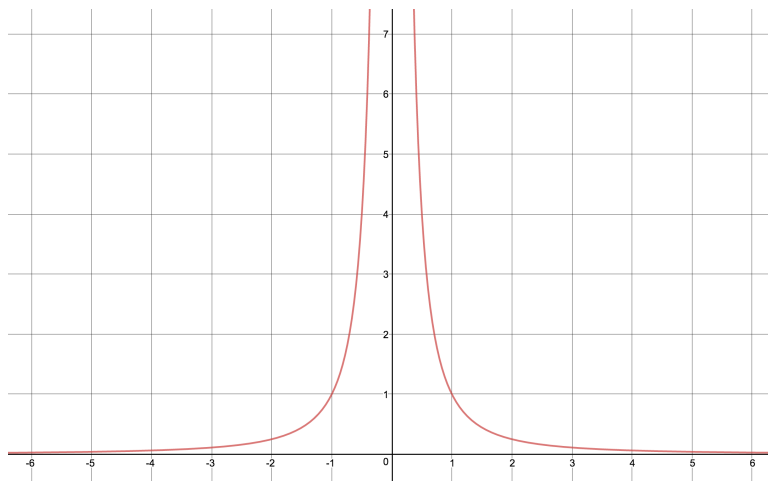
f) $x^{-3} + x^{-3} = \dots\dots\dots$

B. Gebroken functies

4. Gegeven is de functie: $y = x^{-2}$.

We hebben bij A gezien dat we deze functie kunnen schrijven als: $y = \frac{1}{x^2}$

De grafiek hiervan ziet er zo uit:



x	-100	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10	100
$y = \frac{1}{x^2}$	0,0001	0,01	0,04	0,25	1	$\times$	1	0,25	0,04	0,01	0,0001

We zien een bijzonder verschijnsel, namelijk dat de grafiek uit twee delen bestaat én dat de grafiek heel dichtbij beide assen komt. Laten we eens wat punten invullen voor x :

Het is duidelijk dat de y -waarde steeds kleiner wordt, naarmate de x -waarde groter wordt. Stel dat we $x = 1.000.000$ invullen, dan wordt $y = 0,00000000000001$. Maar hoe groot we x ook nemen, y wordt nooit gelijk aan 0.

En wat gebeurt er eigenlijk bij $x=0$? Dat kunnen we niet invullen: $y = \frac{1}{0^2} \Rightarrow \emptyset$. We kunnen wel een hele kleine x -waarde invullen, bijvoorbeeld $x = 0,0005$.

$$x = 0,0005 \Rightarrow y = \frac{1}{(0,0005)^2} = 4.000.000$$

Conclusie: De y -waarde wordt steeds groter als de x -waarde kleiner wordt. Maar hoe klein we x ook nemen, we mogen 0 niet invullen.

Oefeningen

5. Teken met www.desmos.com de grafieken van de functies die hieronder staan en lees de y -waarde af die hoort bij de gegeven x -waarde.

a) $y = \frac{1}{x}$ $x = 1; y = \dots\dots\dots$

b) $y = \frac{4}{x}$ $x = 1; y = \dots\dots\dots$

c) $y = \frac{-3}{x}$ $x = -2; y = \dots\dots\dots$

d) $y = \frac{3}{2x}$ $x = 6; y = \dots\dots\dots$

e) $y = \frac{-2}{x}$ $x = -1; y = \dots\dots\dots$

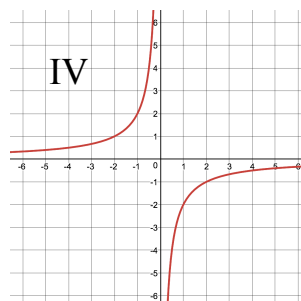
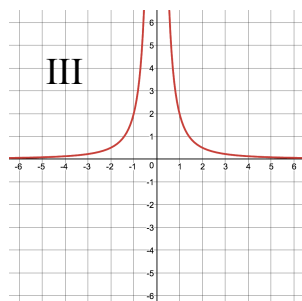
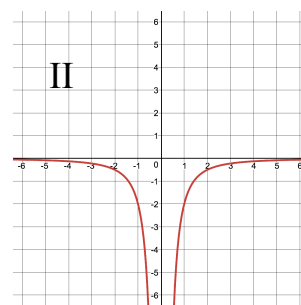
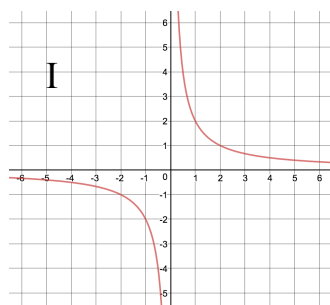
6. Teken met www.desmos.com de grafieken van de functies die hieronder staan en geef aan welk plaatje waarbij hoort.

a) $y = \frac{2}{x}$

b) $y = \frac{2}{x^2}$

c) $y = \frac{-2}{x}$

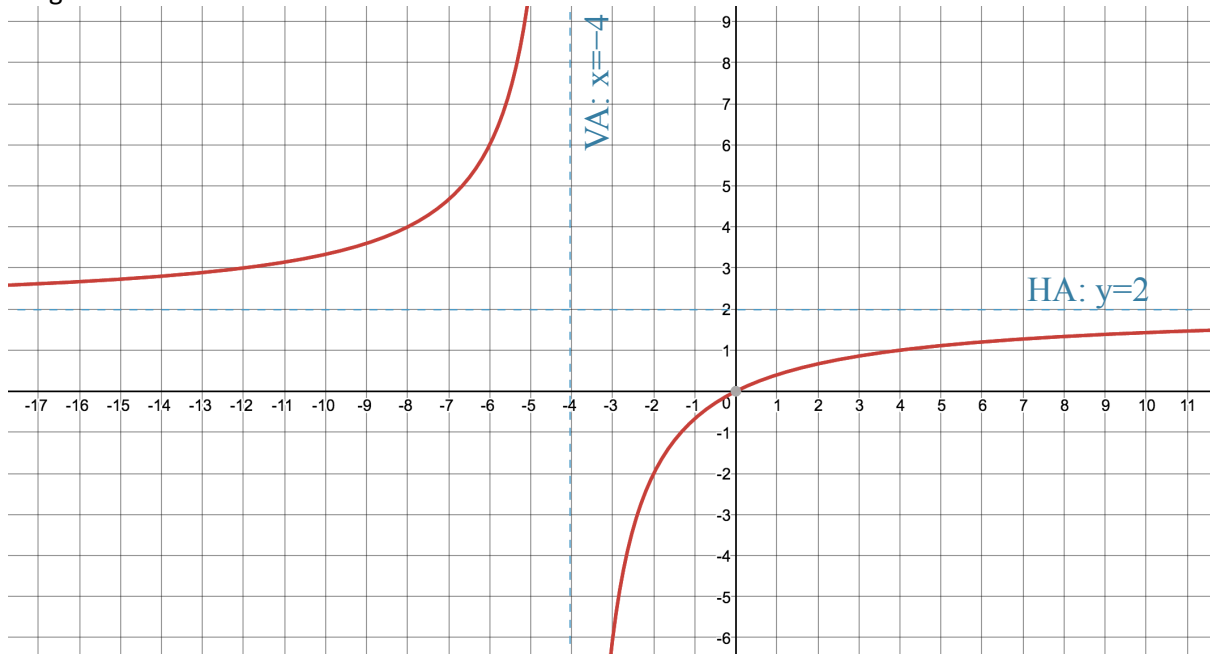
d) $y = \frac{-2}{x^2}$



C. Asymptoten

7. Gegeven is de functie: $y = \frac{4x}{2x+8}$.

De grafiek van deze functie ziet er zo uit:



Ook bij deze grafiek zie je weer dat er twee rechte lijnen zijn, waar de grafiek dicht tegenaan kruipt. Alleen nu zijn het niet de x-as en de y-as. Deze lijnen noemen we asymptoten. Er is een horizontale asymptoot (HA) en een verticale asymptoot (VA).

Om de **verticale** asymptoot (VA) te vinden, moet je de volgende vraag beantwoorden: “Welke waarde van x mag ik niet invullen?”, oftewel: Welke waarde van x zorgt ervoor dat de noemer 0 wordt? In bovenstaand voorbeeld mag je geen $x = -4$ invullen. Want dan staat er dit:

$$y = \frac{4x}{2x+8} = \frac{4 \cdot -4}{2 \cdot -4 + 8} = \frac{-16}{-8+8} = \frac{-16}{0} \Rightarrow \emptyset$$

De verticale asymptoot is daarom: $x = -4$

Om de **horizontale** asymptoot (HA) te vinden, moet je de volgende vraag beantwoorden: “Wat gebeurt er als je een héééle grote waarde voor x invult?”

In het voorbeeld heeft de 8 dan vrijwel geen betekenis meer, dus laten we die weg:

$$y = \frac{4 \cdot 1.000.000.000.000}{2 \cdot 1.000.000.000.000 + 8} = \frac{4 \cdot 1.000.000.000.000}{2 \cdot 1.000.000.000.000} = \frac{4}{2} = 2$$

Het gaat nog om $4 \times$ een heel groot getal gedeeld door $2 \times$ een heel groot getal. En die grote getallen zijn hetzelfde, dus kun je ze tegen elkaar wegdelen. Wat overblijft is $4 \div 2 = 2$.

De horizontale asymptoot is daarom: $y = 2$

8. Gegeven is de functie: $y = \frac{15x+4}{3x-9}$. We gaan van deze functie de verticale en de horizontale asymptoot bepalen.

Om de **verticale** asymptoot (VA) te vinden, moet je de volgende vraag beantwoorden: "Welke waarde van x mag ik niet invullen?", oftewel: Welke waarde van x zorgt ervoor dat de noemer 0 wordt?
In bovenstaand voorbeeld mag je geen $x=3$ invullen. Want dan staat er dit:

$$y = \frac{15x+4}{3x-9} = \frac{15 \cdot 3 + 4}{3 \cdot 3 - 9} = \frac{49}{9-9} = \frac{49}{0} \Rightarrow \emptyset$$

De verticale asymptoot is daarom: $x = 3$

Om de **horizontale** asymptoot (HA) te vinden, moet je de volgende vraag beantwoorden: "Wat gebeurt er als je een héééle grote waarde voor x invult?"

In het voorbeeld hebben de 4 en de -9 dan vrijwel geen betekenis meer, dus laten we die weg:

$$y = \frac{15 \cdot 1.000.000.000.000 + 4}{3 \cdot 1.000.000.000.000 - 9} = \frac{15 \cdot 1.000.000.000.000}{3 \cdot 1.000.000.000.000} = \frac{15}{3} = 5$$

Het gaat nog om $15x$ een heel groot getal gedeeld door $3x$ een heel groot getal. En die grote getallen zijn hetzelfde, dus kun je ze tegen elkaar wegdelen. Wat overblijft is $15 \div 3 = 5$.

De horizontale asymptoot is daarom: $y = 5$

D. Snijpunten met de x-as en de y-as

9. Gegeven is de functie: $y = \frac{2x-8}{x-1}$. We gaan van deze functie het snijpunt met de x-as en het snijpunt met de y-as bepalen.

Net als bij andere functies kun je het snijpunt met de y-as vinden door $x = 0$ in te vullen:

$$y = \frac{2x-8}{x-1} = \frac{2 \cdot 0 - 8}{0 - 1} = \frac{0 - 8}{0 - 1} = \frac{-8}{-1} = 8 \quad \text{snijpunt y-as: } (0,8)$$

Het snijpunt met de x-as vind je door de hele functie gelijk te stellen aan 0:

$$\begin{aligned} \frac{2x-8}{x-1} &= 0 \\ \Rightarrow 2x-8 &= 0 \quad (\text{en } x \neq 1) \\ \Rightarrow 2x &= 8 \quad (\text{en } x \neq 1) \\ \Rightarrow x &= 4 \quad (\text{en } x \neq 1) \quad \text{snijpunt x-as: } (4,0) \end{aligned}$$

Oefeningen

10. Bepaal van onderstaande grafieken twee dingen:

- de verticale asymptoot
- de horizontale asymptoot

$$a) y = \frac{4}{x-3} \quad c) y = \frac{2}{2x-1} \quad e) y = \frac{-6}{x+1}$$

$$b) y = \frac{1}{x-1} \quad d) y = 2 - \frac{1}{x} \quad f) y = \frac{6x+2}{4x-16}$$

11. Bepaal van onderstaande grafieken vier dingen:

- de verticale asymptoot
- de horizontale asymptoot
- het snijpunt met de y-as
- het snijpunt met de x-as

$$a) y = \frac{x+2}{x-5} \quad c) y = \frac{2x-2}{x-4} \quad e) y = \frac{x}{x-3}$$

$$b) y = \frac{4x+1}{2x-6} \quad d) y = \frac{3x-2}{x+2} \quad f) y = \frac{x+2}{x}$$

12. Los de volgende vergelijkingen op.

$$a) \frac{x+5}{x-1} = 2 \quad d) \frac{x-1}{x+5} = 4 \quad g) \frac{3x+2}{x-4} = -5 \quad j) \frac{-x+7}{2x+4} = 3$$

$$b) \frac{4}{2x-3} = 4 \quad e) \frac{1}{2x} + 1 = 3 \quad h) \frac{2}{1-x} = 3 \quad k) \frac{4x-1}{2x} = 1\frac{1}{2}$$

$$c) \frac{2}{3x+2} = -2 \quad f) \frac{2+2x}{x} = 3 \quad i) \frac{3}{\frac{1}{2}x+1} = 2 \quad l) \frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x} = 6$$