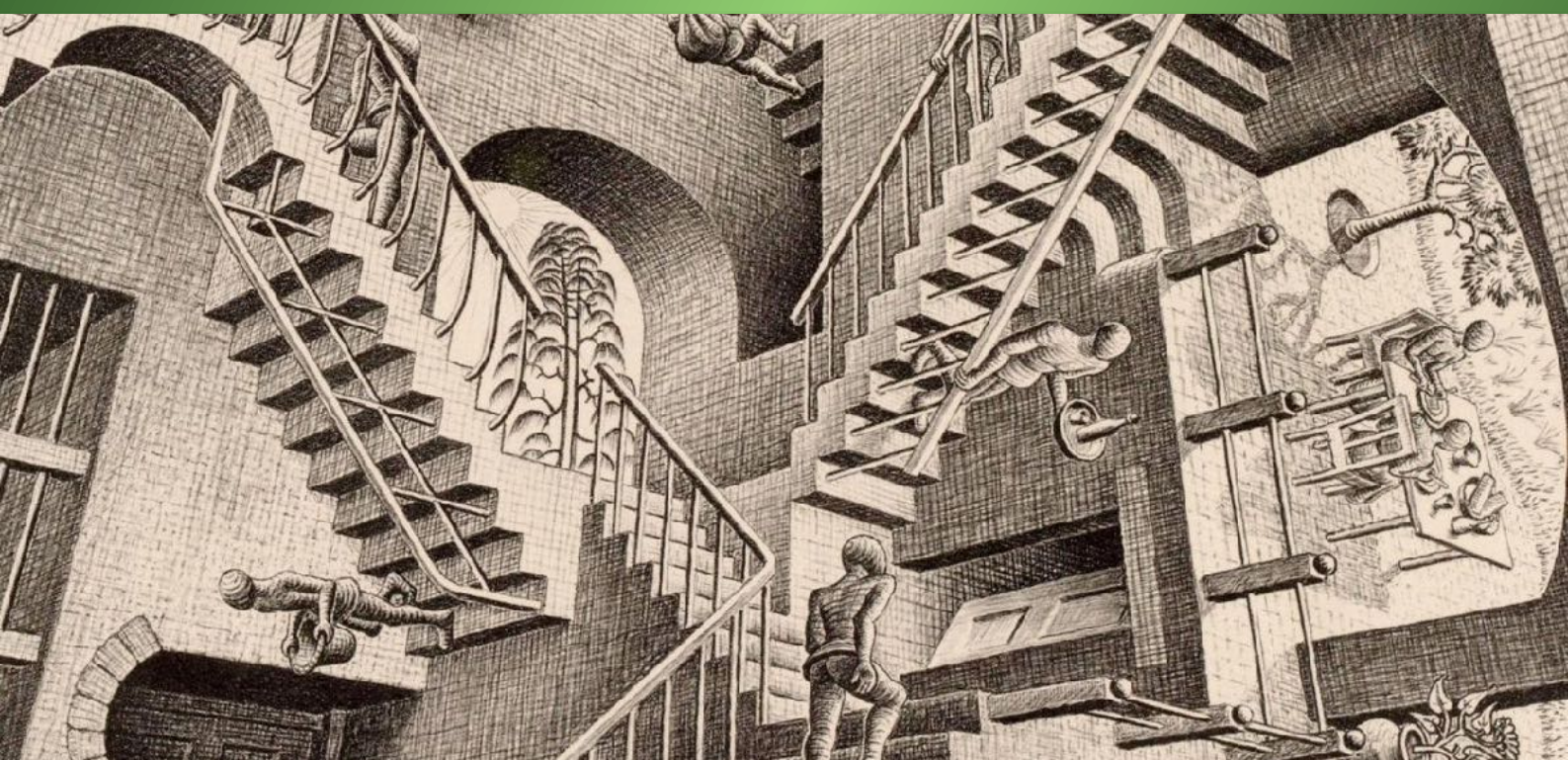


Meetkunde

MBO Wiskunde Niveau 4 - Leerjaar 1, periode 3



LOCATIE: Noorderpoort Beroepsonderwijs Stadskanaal
DOMEINEN: Bouwkunde, Werktuigbouw, Research Instrumentmaker
LEERWEG: BOL - MBO Niveau 4
DATUM: Feb 2018
DOCENT: H.J. Riksen

Meetkunde

MBO Wiskunde Niveau 4 - Leerjaar 1, periode 3

LOCATIE: Noorderpoort Beroepsonderwijs Stadskanaal
DOMEINEN: Bouwkunde, Werktuigbouw, Research Instrumentmaker
LEERWEG: BOL - MBO Niveau 4
DATUM: Feb 2018
DOCENT: H.J. Riksen

Inhoud

1.	Vierhoeken	4
2.	Veelhoeken	12
3.	Cirkels	19
4.	Kubussen en balken	28
5.	Bollen en cilinders	34
6.	Prisma's	44
7.	Kegels en piramides	51

1 Vierhoeken



Vierkant



Rechthoek



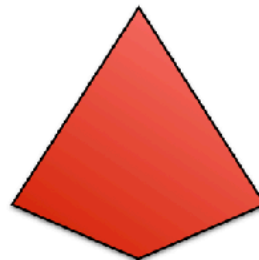
Parallellogram



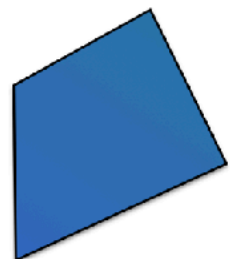
Ruit



Trapezium



Vlieger



Vierhoek

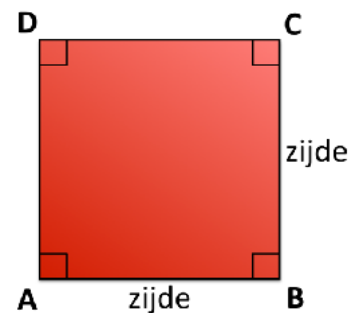
Er bestaan zes verschillende regelmatige vierhoeken: vierkant, rechthoek, parallellogram, ruit, trapezium en vlieger. Daarnaast bestaan er oneindig veel vierhoeken die niet regelmatig zijn.

We leren in dit hoofdstuk de regelmatige vierhoeken kennen en gaan met name rekenen aan hun oppervlaktes.

Vierkant

Een vierkant is een vierhoek met vier rechte hoeken én vier gelijke zijden.

Je kunt de omtrek berekenen door vier keer de zijde bij elkaar op te tellen. De oppervlakte is zijde $\times$ zijde, oftewel zijde².



Rechthoek

Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken. Je kunt de omtrek berekenen door twee keer de lengte en twee keer de breedte bij elkaar op te tellen. De oppervlakte is $\text{lengte} \times \text{breedte}$.

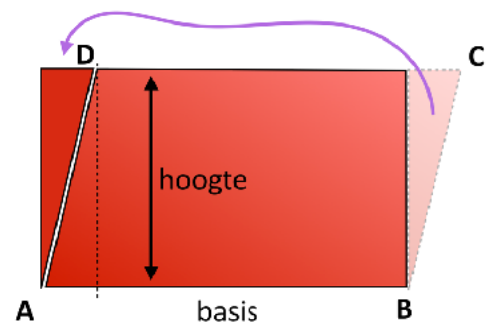
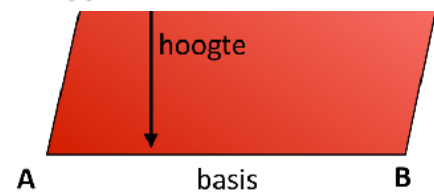
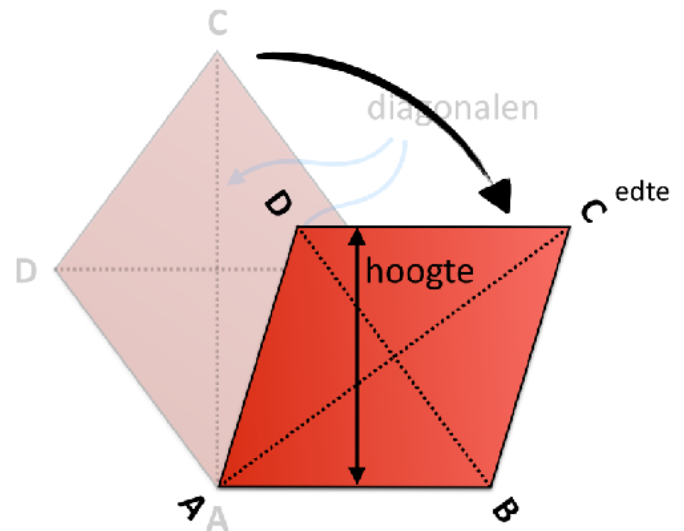
Parallellogram

Een parallellogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.

Zijde AB is evenwijdig aan zijde CD, en zijde BC is evenwijdig aan zijde AD. We noteren dat zo: $AB \parallel CD$ en $BC \parallel AD$.

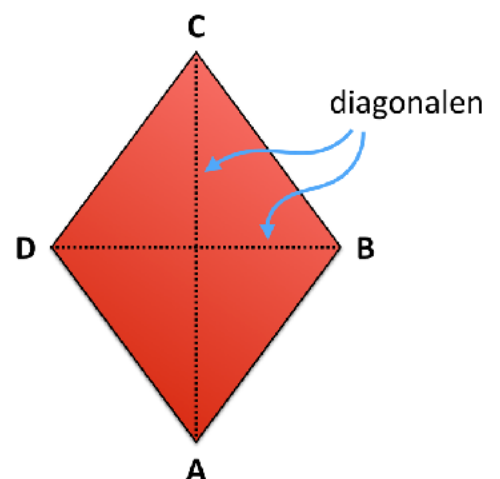
De onderste zijde noemen we de basis en de kortste afstand tussen AB en CD is de hoogte. Je kunt de oppervlakte berekenen met de formule: $\text{basis} \times \text{hoogte}$.

In dit plaatje kun je zien dat je van een parallellogram ook weer een rechthoek kunt maken. Zo snap je ook meteen waarom de oppervlakte gelijk is aan $\text{basis} \times \text{hoogte}$.



Ruit

Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden. Als je de lengte van één zijde weet, weet je ze dus alle vier. Maar dat wil nog niet zeggen dat je de oppervlakte kunt uitrekenen. Daarvoor heb je de lengte van de diagonalen nodig. De oppervlakte wordt dan: $\frac{1}{2} \times \text{diagonaal 1} \times \text{diagonaal 2}$.



Een ruit kun je 'omgooien', zeg maar platleggen. Dan zie je meteen dat een ruit ook een parallellogram is. Een bijzonder parallellogram, want deze heeft vier gelijke zijden.

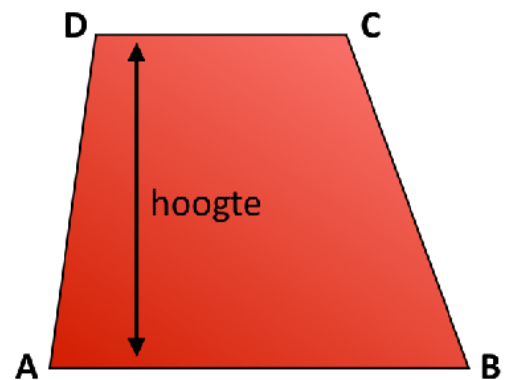
De regels van een parallellogram zijn dus ook van toepassing op iedere ruit.

Trapezium

Een trapezium is een vierhoek met minimaal één paar evenwijdige zijden. Je berekent de oppervlakte met de volgende formule:

Oppervlakte = $\frac{1}{2} \times \text{som evenwijdige lijnen} \times \text{hoogte}$

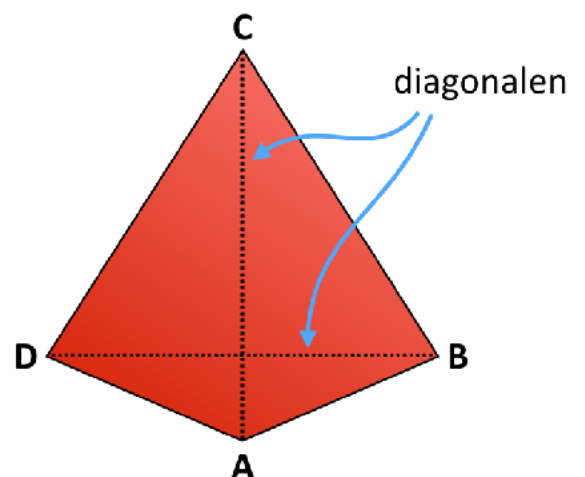
De som van de evenwijdige lijnen betekent dat je de lengte van AB en CD bij elkaar optelt.



Vlieger

Een vlieger is een vierhoek waarbij de aanliggende zijden twee aan twee gelijk zijn. Je berekent de oppervlakte met de volgende formule:

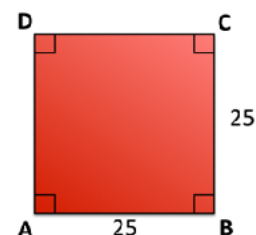
Oppervlakte = $\frac{1}{2} \times \text{diagonaal 1} \times \text{diagonaal 2}$



Opdrachten

Opdracht 1

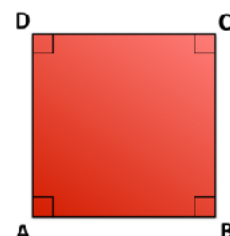
Bereken de omtrek én oppervlakte van een vierkant met zijde 25 cm.



Opdracht 2

Een vierkant heeft een omtrek van 52 cm.

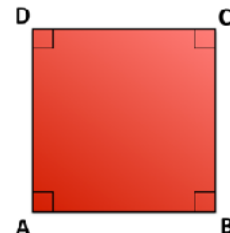
- a) Bereken de lengte van een zijde.
- b) Bereken de oppervlakte.



Opdracht 3

Een vierkant heeft een oppervlakte van 256 cm^2 .

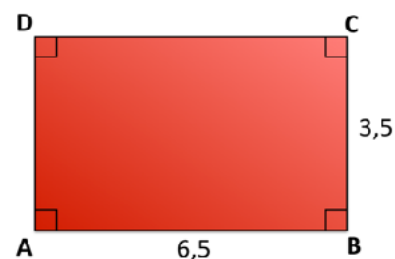
- a) Bereken de lengte van een zijde.
- b) Bereken de omtrek.



Opdracht 4

Een rechthoek heeft een lengte van 6,5 cm en een breedte van 3,5 cm.

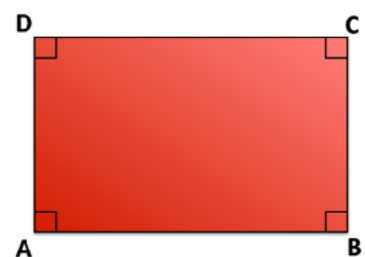
- a) Bereken de omtrek.
- b) Bereken de oppervlakte.



Opdracht 5

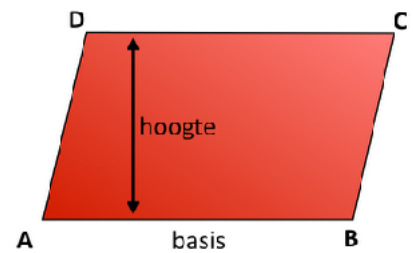
Een rechthoek heeft een oppervlakte van $26,46 \text{ cm}^2$. De lengte is 6,3 cm.

- a) Bereken de breedte.
- b) Bereken de omtrek.

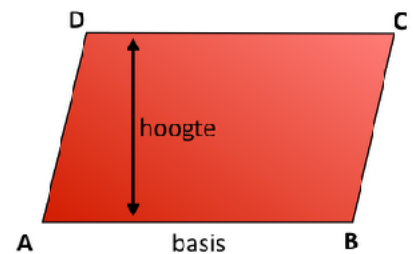


Opdracht 6

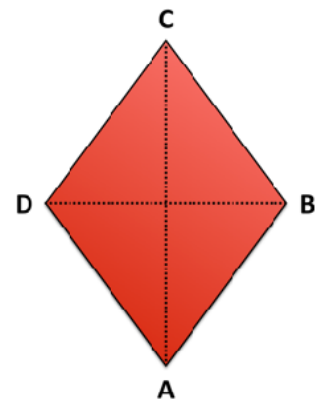
Een parallellogram heeft een basis van 12 cm en een hoogte van 7 cm. Bereken de oppervlakte.

**Opdracht 7**

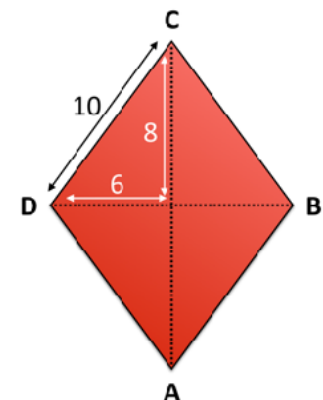
Een parallellogram heeft een oppervlakte van $31,92 \text{ cm}^2$ en een basis van 7,6 cm. Bereken de hoogte.

**Opdracht 8**

Van een ruit zijn de diagonalen 8 en 12 cm lang. Bereken de oppervlakte.

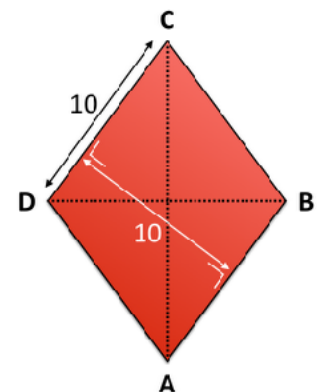
**Opdracht 9**

Van een ruit zijn de aangegeven maten bekend. Bereken de oppervlakte.



Opdracht 10

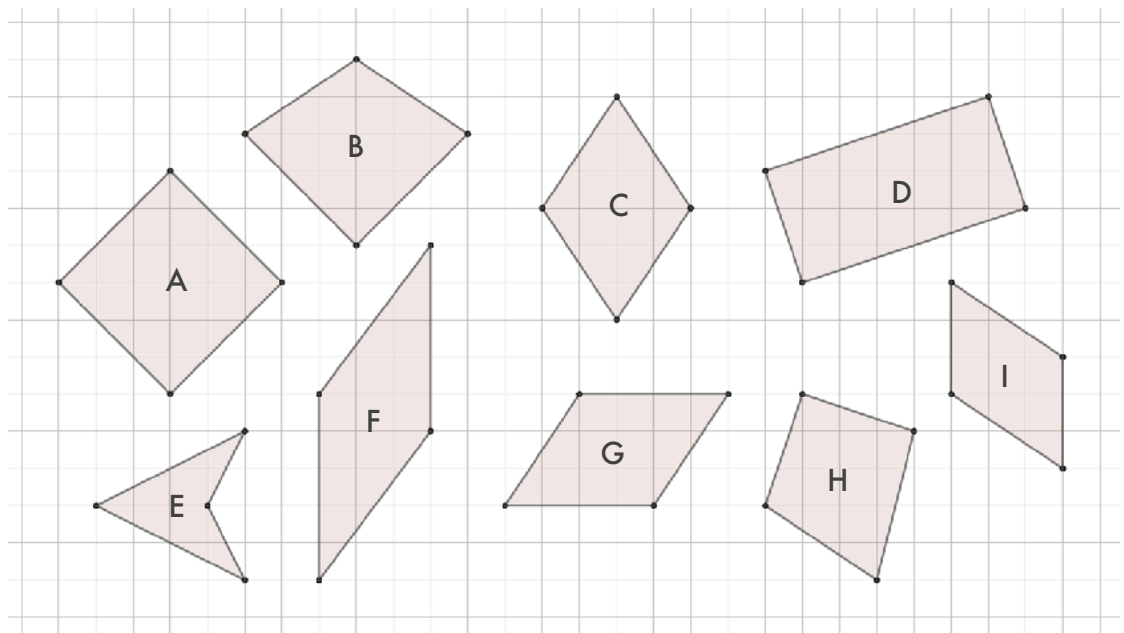
Van een ruit zijn de aangegeven maten bekend.
Bereken de oppervlakte.

**Opdracht 11**

Van een ruit is bekend dat één hoek 90° is. Wat weet je dan nog meer dan deze ruit?

Opdracht 12

- Welke figuren zijn vliegers en waarom?
- Welke figuren zijn ruiten en waarom?

**Opdracht 13**

Een vierhoek heeft twee tegenover elkaar liggende hoeken van 90° en één hoek van 29° .

- Bereken hoe groot de vierde hoek is.
- Geef de naam van deze vierhoek.

Opdracht 14

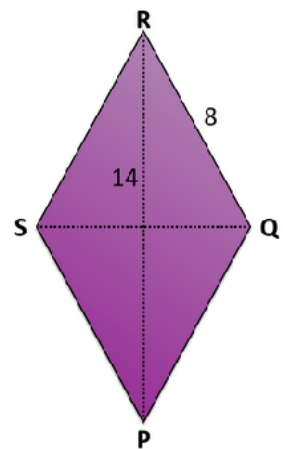
Een vierhoek heeft een hoek van 42° , een hoek van 138° en vier zijden van 3,5 cm.

- Bereken hoe groot de andere hoeken zijn.
- Geef de naam van deze vierhoek.

Opdracht 15

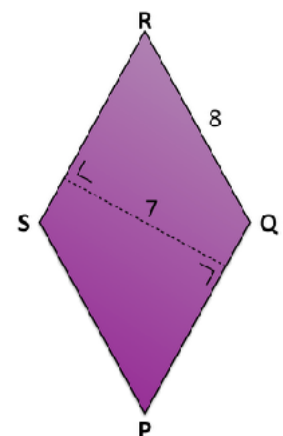
Een ruit heeft vier gelijke zijden van 8 cm. De langste diagonaal is 14 cm.

Bereken de oppervlakte van deze ruit.

**Opdracht 16**

Een ruit heeft vier gelijke zijden van 8 cm. De loodlijn tussen twee tegenover elkaar liggende zijden is 7 cm lang.

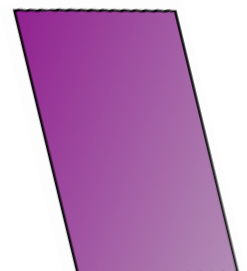
Bereken de oppervlakte van deze ruit.

**Opdracht 17**

Je hebt geleerd dat een parallellogram omschreven wordt als:
Een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.

Welke definitie geldt nog meer voor een parallellogram?

- Een vierhoek waarvan de tegenoverliggende zijden even lang zijn.
- Een vierhoek waarvan de overstaande hoeken even groot zijn.
- Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar middendoor delen.



Opdracht 18

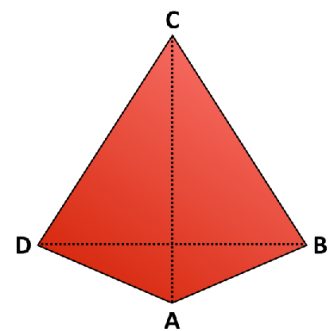
Welke vierhoek(en) word(t)(en) omschreven met de volgende definitie?

Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar loodrecht middendoor delen.

Opdracht 19

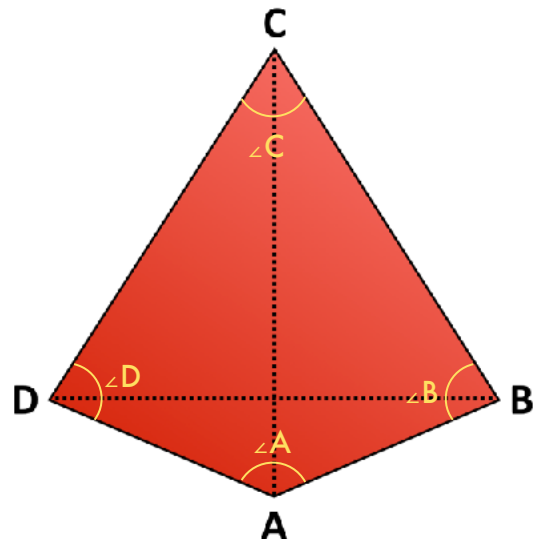
Een vlieger heeft een oppervlakte van 144 cm^2 . Eén diagonaal is 24 cm lang.

Bereken de lengte van de andere diagonaal.

**Opdracht 20**

Van een vlieger zijn beide diagonalen 5,2 cm.

- Bereken de oppervlakte van deze vlieger.
- Diagonaal AC wordt (door diagonaal BD) in twee stukken verdeeld van 1,1 en 4,1 cm. Bereken nu hoek $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ en $\angle D$.



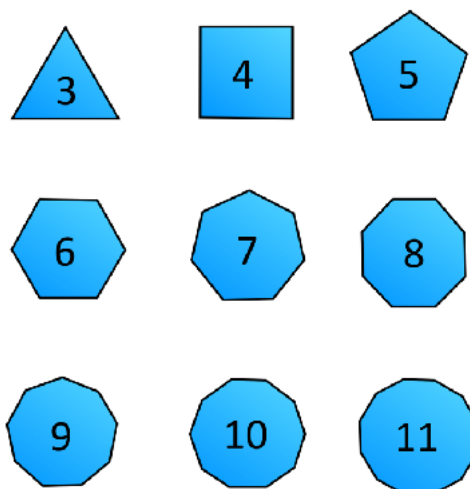
2 Veelhoeken

	Regelmatig	Onregelmatig
Driehoek		
Vierhoek		
Veelhoek (pentagon)		
Veelhoek (hexagon)		
Veelhoek (octagon)		

Figuren met méér dan vier hoeken noemen we veelhoeken. Net als bij driehoeken en vierhoeken bestaan er regelmatige en onregelmatige veelhoeken. De definitie van een regelmatige veelhoek is als volgt:

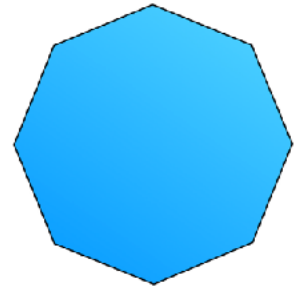
Een regelmatige veelhoek is een veelhoek waarvan alle zijden even lang zijn en alle hoeken even groot.

Hoe méér hoeken een regelmatige veelhoek heeft, des te meer lijkt hij op een cirkel.

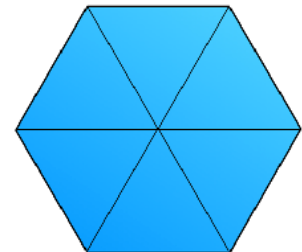


Aantal hoeken = aantal zijden

Een veelhoek heeft evenveel hoeken als zijden. Een vijfhoek heeft vijf zijden, een zeshoek heeft zes zijden enzovoort.

**Driehoeken**

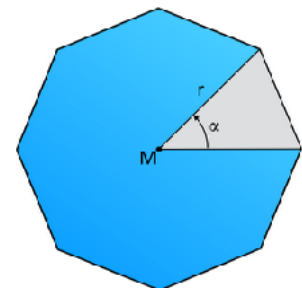
Je kunt een veelhoek altijd onderverdelen in driehoeken. Een vijfhoek kun je verdelen in vijf driehoeken, een zeshoek in zes driehoeken, enzovoort.

**Middelpunt en straal**

In het midden van een veelhoek bevindt zich middelpunt M. De afstand van het middelpunt M tot een hoek noemen we straal r.

Hoek α is gemakkelijk uit te rekenen. Je deelt 360° door het aantal hoeken (n) van de veelhoek. In het plaatje hiernaast staat een achthoek, dus dan geldt:

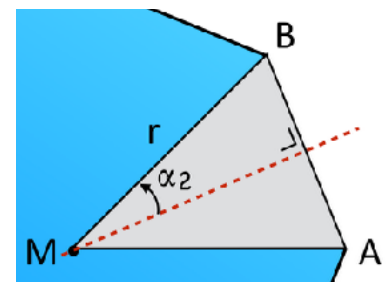
$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

**Omtrek**

Als we straal r weten, kunnen we de lengte van AB bepalen. Daarvoor tekenen we eerst een hulplijn door het midden van de driehoek. Nu ontstaat α_2 , de helft van α . Met behulp van de sinus kunnen we de overstaande zijde uitrekenen:

$$\sin \alpha_2 = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{\text{overstaande zijde}}{r}$$

dus: $\text{overstaande zijde} = \sin \alpha_2 \times r$ en AB is dan 2x die overstaande zijde.



$$AB = 2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot r$$

De omtrek van de veelhoek wordt dan het aantal hoeken (n) $\times$ AB. Zo komen we tot de volgende formule voor de omtrek van een veelhoek:

$$\text{omtrek veelhoek} = 2 \cdot n \cdot \sin \alpha_2 \cdot r$$

Voor α_2 kunnen we ook schrijven: $\frac{\left(\frac{360}{n}\right)}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{360}{n} = \frac{180}{n}$.

Uiteindelijk wordt de formule van de omtrek:

$$\text{omtrek veelhoek} = 2 \cdot n \cdot \sin \left(\frac{180}{n} \right) \cdot r$$

Oppervlakte

De oppervlakte van een driehoek is: $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$.

De basis (AB) hebben we al uitgerekend bij de omtrek:

$$AB = 2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot r$$

De hoogte kunnen we vinden met behulp van de cosinus.

$$\cos \alpha_2 = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}} = \frac{\text{aanliggende zijde}}{r}$$

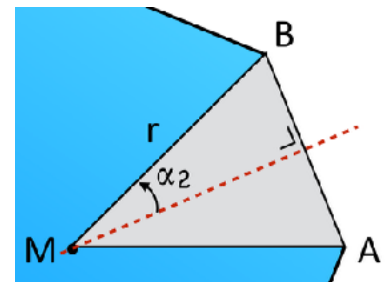
dus: $\text{aanliggende zijde} = \cos \alpha_2 \times r$.

De oppervlakte van de driehoek wordt dan:

$$\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times 2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot r \times \cos \alpha_2 \cdot r = \sin \alpha_2 \times \cos \alpha_2 \cdot r^2$$

De oppervlakte van de veelhoek wordt dan:

$$\text{oppervlakte veelhoek} = n \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot r^2$$

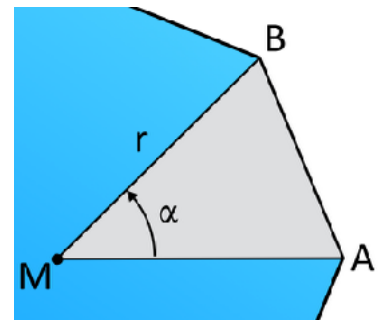


Opdrachten

Opdracht 1

Een veelhoek kun je verdelen in driehoeken, zoals driehoek ABM hiernaast. Daarbij ontstaat hoek α in iedere driehoek.

- Bereken hoek α voor een 6-hoek
- Bereken hoek α voor een 8-hoek.
- Bereken hoek α voor een 9-hoek.
- Bereken hoek α voor een 10-hoek.



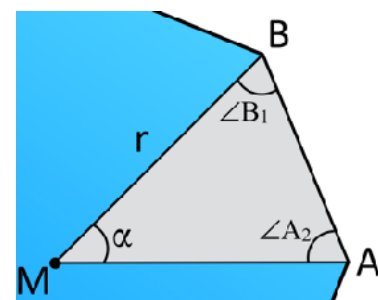
Opdracht 2

Zie opdracht 1.

- Bereken hoek α voor een 24-hoek
- Bereken hoek α voor een 40-hoek.
- Bereken hoek α voor een 90-hoek.
- Bereken hoek α voor een 180-hoek.

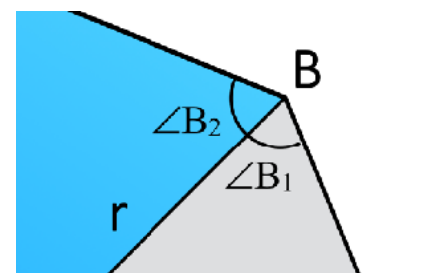
Opdracht 3

- Bereken $\angle A_2$ en $\angle B_1$ voor een 8-hoek
- Bereken $\angle A_2$ en $\angle B_1$ voor een 6-hoek
- Wat voor soort driehoek is $\triangle ABM$ bij een 6-hoek?



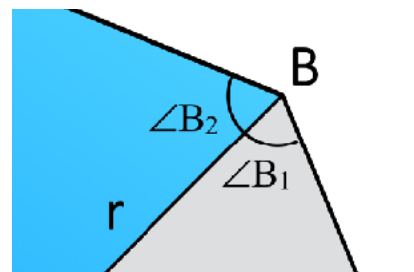
Opdracht 4

- Bereken $\angle B_2$ voor een 8-hoek
- Bereken $\angle B$ voor een 8-hoek ($\angle B = \angle B_1 + \angle B_2$)
- Vermenigvuldig de waarde van $\angle B$ met 8



Opdracht 5

- Bereken $\angle B_2$ voor een 10-hoek
- Bereken $\angle B$ voor een 10-hoek ($\angle B = \angle B_1 + \angle B_2$)
- Vermenigvuldig de waarde van $\angle B$ met 10

**Opdracht 6**

Er bestaat een formule voor het uitrekenen van de som van alle hoeken:

$$\text{som van de hoeken} = (\text{aantal hoeken} - 2) \times 180^\circ = (n - 2)180^\circ$$

Vul met behulp van deze formule de volgende tabel in:

Aantal hoeken van een veelhoek (n)	Som van de hoeken $(n-2)180^\circ$
3	$(3-2) \times 180^\circ = 180^\circ$
4	$(4-2) \times 180^\circ =$
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Controleer je antwoord bij vraag 4c en 5c.

Opdracht 7

Bereken de omtrek van een 8-hoek met straal $r = 10$ cm

Opdracht 8

Bereken de omtrek van een 12-hoek met straal $r = 20$ cm

Opdracht 9

De omtrek van een 6-hoek is 42 cm. Bereken straal r .

Opdracht 10

Bereken de oppervlakte van een 10-hoek met straal $r = 12$ cm

Opdracht 11

Bereken de oppervlakte van een 12-hoek met straal $r = 8$ cm

Opdracht 12

Een 9-hoek heeft een oppervlakte van 600 cm^2 . Bereken straal r .

Opdracht 13

De som van de hoeken van een veelhoek is 2880° . Hoeveel hoeken heeft deze veelhoek?

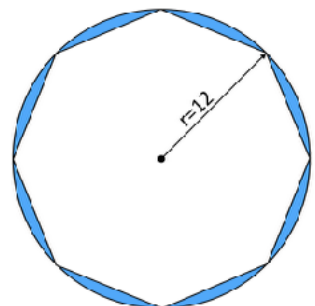
Opdracht 14

Hoeveel zijden heeft een 144-hoek?

Opdracht 15

Een 8-hoek heeft een straal van $r = 12$ cm. De 8-hoek ligt bovenop een cirkel die ook een straal $r = 12$ cm heeft.

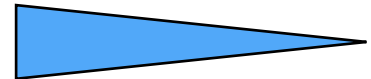
Bereken de oppervlakte van het blauwgekleurde gebied.



Opdracht 16

Je hebt de beschikking over 55 gelijkbenige driehoeken met de volgende hoeken:
 12° , 84° en 84° .

- a) Kun je met (een deel van) deze driehoeken een regelmatige veelhoek vormen?
- b) Zo ja: Hoeveel hoeken heeft deze regelmatige veelhoek dan?



Zo nee: wat moet er aan de hoeken veranderen zodat het wél kan?

3 Cirkels

Het getal pi

Ruim vierduizend jaar geleden begon men zich af te vragen of er een relatie bestond tussen de diameter en de omtrek van een cirkel. In die tijd had men in de gaten dat de diameter altijd ongeveer drie keer om de cirkel paste, ongeacht hoe groot de cirkel was. Maar dat ongeveer hield de mensheid bezig. Waarom was het niet gewoon drie keer? Dit bijzondere getal, iets meer dan 3, heeft uiteindelijk de naam pi (π) gekregen.



Heel lang heeft men gedacht dat pi te berekenen was, bijvoorbeeld met de deling $25 \div 8$, maar dat is 3,125 en klopt niet helemaal. Later kwam men met $22 \div 7$ ($=3,142\ 857\ 142\ 857\dots$) en $355 \div 113$ ($=3,141\ 592\ 92\dots$), maar het werd tenslotte duidelijk dat pi niet eenvoudig te berekenen viel. Het is uiteindelijk wel gelukt om formules op te stellen waarmee je pi berekent, maar die kosten zoveel rekentijd dat er computers nodig zijn om een flink aantal cijfers achter de komma te produceren.

```

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091

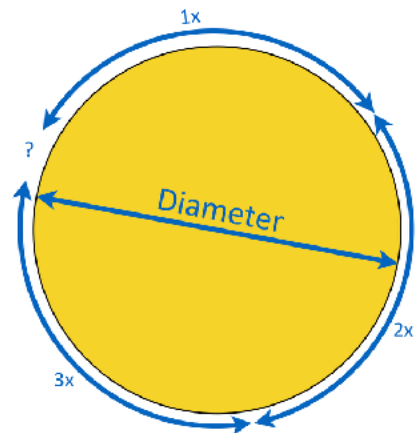
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235
42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960

51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859
50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881
71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989

```

Wat is pi nu precies? Pi is het aantal keren dat de diameter van een cirkel om die cirkel heen past. Stel je neemt een stukje touw dat net zo lang is als de diameter van een cirkel. Vervolgens leg je dat stukje touw steeds om de cirkel heen. Dat gaat drie keer en dan hou je nog een klein stukje over. Dat 'drie en een beetje' is het getal pi.



Omtrek van een cirkel

De omtrek van een cirkel kun je bereken door pi te vermenigvuldigen met de diameter: $omtrek = D \cdot \pi$

Sommigen rekenen liever met de straal van een cirkel. De straal is de helft van de diameter en de formule wordt dan twee keer de straal keer pi: $omtrek = 2 \cdot \pi \cdot r$

Oppervlakte van een cirkel

De oppervlakte van een cirkel kun je bereken met de volgende formule:

$$oppervlakte = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2$$

Als je met de straal wilt rekenen wordt het: $oppervlakte = \pi \cdot r^2$

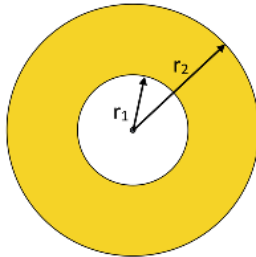
Misschien heb je vroeger straal $\times$ straal $\times$ pi geleerd; dat is hetzelfde.

Cirkelring

Een cirkelring komt veel voor in de techniek. Denk maar aan de volgende voorwerpen:



Je kunt de oppervlakte van een cirkelring berekenen door de oppervlakte van de kleine cirkel (binnencirkel) af te trekken van de oppervlakte van de grote cirkel (buitencirkel):



oppervlakte cirkelring = oppervlakte grote cirkel – oppervlakte kleine cirkel

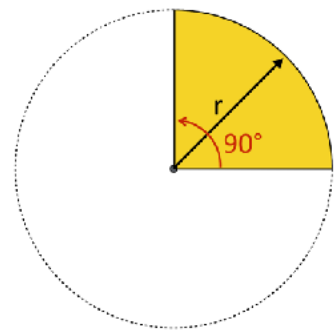
Cirkelsector

Een cirkelsector is een 'hapje' uit een cirkel, een soort pizzapunt. Je kunt de grootte van de sector aangeven in graden, bijvoorbeeld: 90° .

Van dit voorbeeld zie je meteen dat de oppervlakte van de sector gelijk is aan $\frac{1}{4}$ x oppervlakte van de hele cirkel. Dat kun je als volgt verklaren:

De sector is 90° van de 360° , dat is dus: $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$.

Op die manier kun je van iedere sector de oppervlakte bepalen, als je de hoek weet: *oppervlakte cirkel sector = $\frac{\text{hoek}}{360} \times \text{oppervlakte cirkel}$*



Op dezelfde manier bepaal je ook de omtrek van een cirkelsector. Maar let op! Bij de omtrek van een cirkelsector horen ook de twee rechte stukken, dus er komt nog twee keer de straal bij: *omtrek cirkel sector = $\frac{\text{hoek}}{360} \times \text{omtrek cirkel} + 2r$*

Cirkelformules

Net als bij lijnen en parabolen, kun je cirkels zien als de grafiek van een formule.

De algemene vergelijking van een cirkel luidt: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

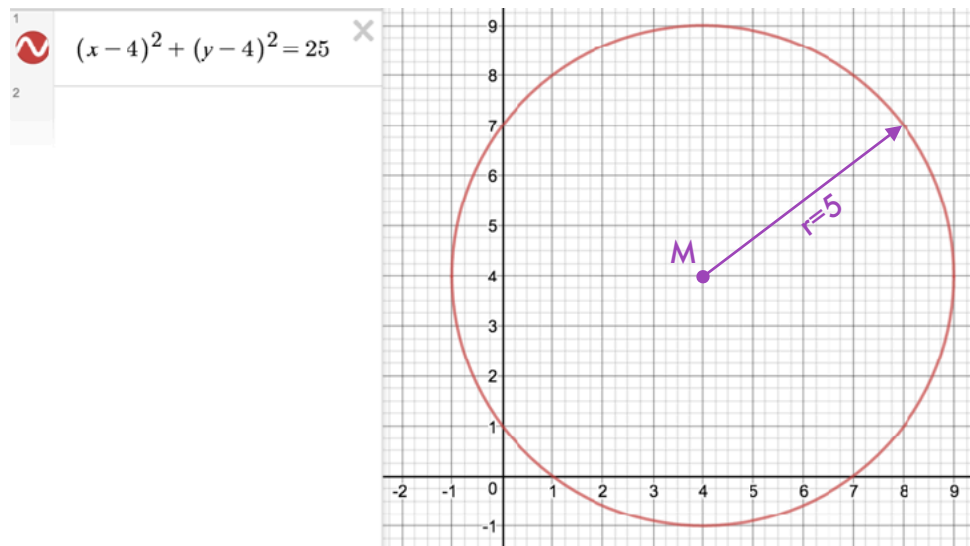
Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r .

Voorbeeld 1

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(4,4)$.

Omdat $r^2 = 25$ geldt dat: $r = \sqrt{25} = 5$

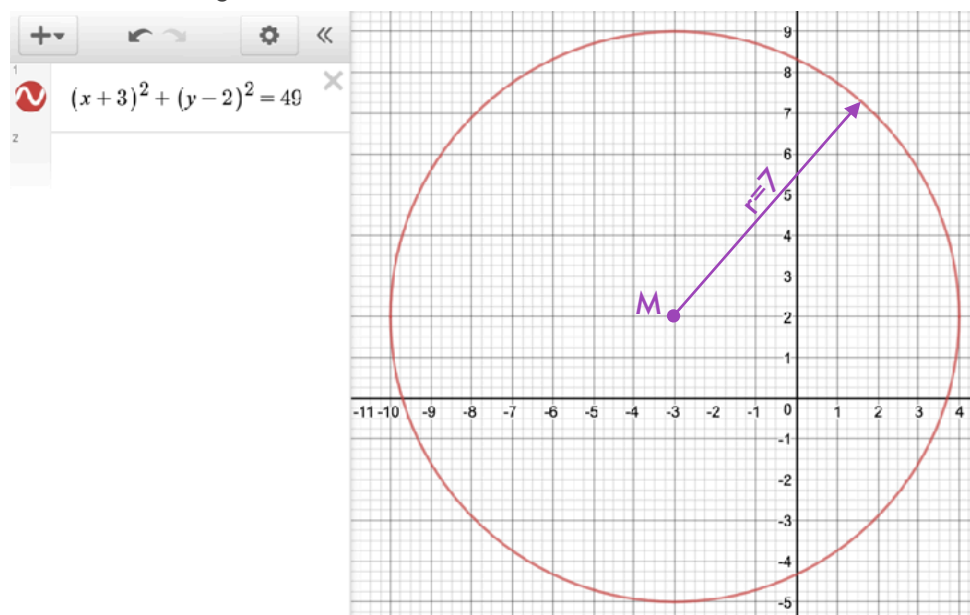


Voorbeeld 2

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 49$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(-3,2)$.

Omdat $r^2 = 49$ geldt dat: $r = \sqrt{49} = 7$



Opdrachten

Opdracht 1

Een cirkel heeft een diameter van $D = 10$ cm.

- Bereken de omtrek van deze cirkel met de formule van de diameter (in cm).
- Bereken de oppervlakte van deze cirkel met de formule van de diameter (in cm^2).

Opdracht 2

Een cirkel heeft een straal van $r = 24$ cm.

- Bereken de omtrek van deze cirkel met de formule van de straal (in cm).
- Bereken de oppervlakte van deze cirkel met de formule van de straal (in cm^2).

Opdracht 3

Een cirkel heeft een omtrek van $O = 53,41$ cm.

- Bereken de diameter van deze cirkel (in cm).
- Bereken de straal van deze cirkel (in cm).

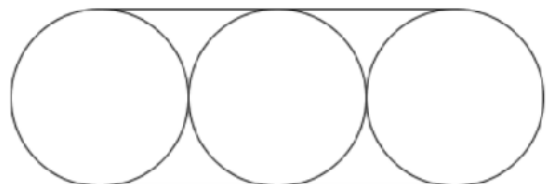
Opdracht 4

Een cirkel heeft een oppervlakte van $A = 6.647,62$ cm.

- Bereken de straal van deze cirkel (in cm).
- Bereken de diameter van deze cirkel (in cm).

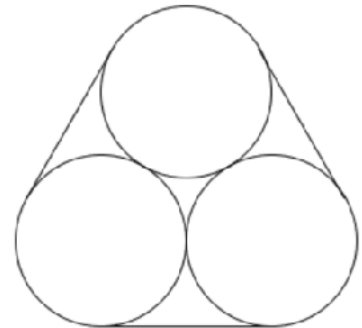
Opdracht 5

Hoe lang moet een touw zijn als men drie blikjes frisdrank met diameter 10 cm op volgende wijze wil samenbinden:



Opdracht 6

Hoe lang moet een touw zijn als men drie blikjes frisdrank met diameter 10 cm op volgende wijze wil samenbinden:

**Opdracht 7**

Een slijpschijf met asdiameter 22,2 mm heeft een diameter van 230 mm. Bereken de oppervlakte van deze slijpschijf (in mm^2).

**Opdracht 8**

Een metalen ring met binnendiameter 10 mm heeft een oppervlakte van 494 mm^2 . Bereken de buitendiameter van deze ring (in mm).

**Opdracht 9**

In Steenokkerzeel (België) staat het ringvormige opvangcentrum Caricole van Bontinck Architecten. De straal van de buitenste muur is 52 m, de straal van de binnenste muur is 42 m.

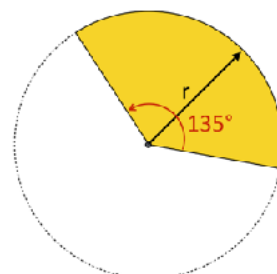
- Bereken de vloeroppervlakte van het ringvormige gebouw (in m^2).
- Bereken de oppervlakte van de binnentuin (in m^2).



Opdracht 10

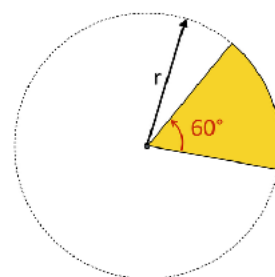
Van een cirkelsector is bekend dat de hoek 135° is en de straal van de oorspronkelijke cirkel $r = 48$ cm.

- Bereken de omtrek van de cirkelsector (in cm).
- Bereken de oppervlakte van de cirkelsector (in cm^2).

**Opdracht 11**

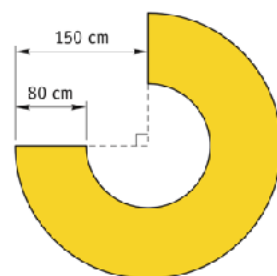
Van een cirkelsector is bekend dat de hoek 60° is en de straal van de oorspronkelijke cirkel $r = 17$ cm.

- Bereken de omtrek van de cirkelsector (in cm).
- Bereken de oppervlakte van de cirkelsector (in cm^2).

**Opdracht 12**

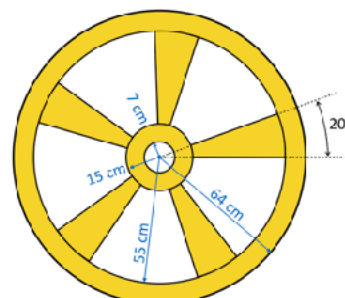
Hiernaast zie je het blad getekend van een bureau.

- Bereken de oppervlakte van het blad (in cm^2).
- De randen van het blad moeten beplakt worden met een kunststof rand. Bereken de lengte van deze rand van kunststof (in cm).

**Opdracht 13**

Een wagenwiel bestaat uit twee cirkelringen en vijf spaken. De hoeken en maten staan aangegeven.

Bereken de oppervlakte van het geelgekleurde deel.



Opdracht 14

Ga naar de website www.desmos.com

Voer de volgende vergelijking in: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ en beantwoord de volgende vragen over deze cirkel:

- a) Welke coördinaten heeft het middelpunt?
- b) Wat is de straal van de cirkel?

Opdracht 15

(vervolg op opdracht 14)

Verander de vergelijking in: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

- a) Welke coördinaten heeft het middelpunt nu?
- b) Hoe zou je de vergelijking moeten veranderen om als middelpunt $M(-3, 3)$ te krijgen?
- c) Hoe zou je de vergelijking moeten veranderen om als middelpunt $M(0, 0)$ te krijgen?

Opdracht 16

(met behulp van www.desmos.com)

Voer de volgende twee vergelijkingen in:

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{en} \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

Deze cirkels overlappen elkaar. Bereken de omtrek van het overlappende deel.

Opdracht 17

(met behulp van www.desmos.com)

Voer de volgende drie vergelijkingen in:

$$y = 2x - 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

De cirkel wordt door de lijnen in vier sectoren verdeeld.

- a) Bereken de oppervlakte van één cirkelsector (cm^2)
- b) Bereken de omtrek van één cirkelsector (cm)

Opdracht 18

Een cirkel heeft een oppervlakte van 7.854 cm^2 en de volgende vergelijking:

$$(x-7)^2 + (y-7)^2 = \dots\dots\dots$$

Welk getal moet er op de puntjes staan?

Opdracht 19

Twee cirkels hebben de volgende vergelijkingen:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 49 \quad \text{en} \quad (x+3)^2 + (y-3)^2 = 49$$

Wat is de afstand tussen de twee middelpunten (cm)?

Opdracht 20

Twee cirkels hebben de volgende vergelijkingen:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \text{en} \quad (x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

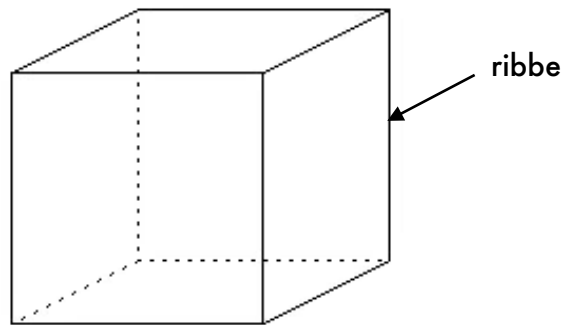
- a) Raken deze cirkels elkaar?
- b) Bereken de afstand tussen de twee middelpunten (cm).

4 Kubussen en balken

Kubus

Een kubus is een ruimtefiguur (3D-figuur) met zes vlakken die allemaal vierkant zijn. De oppervlakte van een hele kubus is zes keer de oppervlakte van één vlak. De 'rand' van een kubus noem je een ribbe. De formule van de oppervlakte wordt daarom:

$$\text{opp. kubus} = 6 \times \text{ribbe} \times \text{ribbe} = 6r^2$$



De inhoud van een kubus is lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte, maar omdat die allemaal even groot zijn kun je ook zeggen dat de inhoud gelijk is aan ribbe $\times$ ribbe $\times$ ribbe $= r^3$.

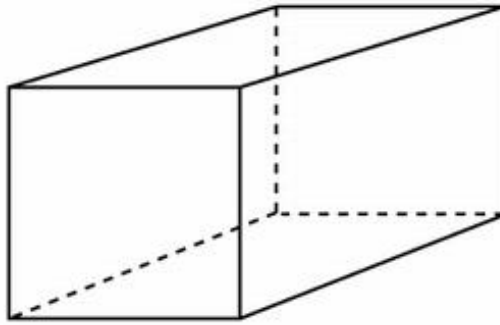
$$\text{inhoud kubus} = \text{ribbe} \times \text{ribbe} \times \text{ribbe} = r^3$$

Balk

Een balk is een ruimtefiguur (3D-figuur) met zes vlakken die allemaal rechthoek zijn. Er zijn altijd minimaal twee vlakken aan elkaar gelijk. Een balk heeft verder 12 ribben die te verdelen zijn in drie groepjes van vier gelijke ribben. De oppervlakte van een balk bereken je als volgt:

$2 \times \text{lengte} \times \text{breedte} + 2 \times \text{lengte} \times \text{hoogte} + 2 \times \text{breedte} \times \text{hoogte}$, oftewel:

$$\text{opp. balk} = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$$



De inhoud van een balk is lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte:

$$\text{inhoud balk} = l \cdot b \cdot h$$

Opdrachten

Opdracht 1

Een kubus heeft een ribbe van 12 cm.

- Bereken de oppervlakte van deze kubus (in cm^2).
- Bereken de inhoud van deze kubus (in cm^3).

Opdracht 2

Een balk heeft de volgende afmetingen: $300 \times 30 \times 15$ cm.

- Bereken de oppervlakte van deze balk (in cm^2).
- Bereken de inhoud van deze balk (in cm^3).

Opdracht 3

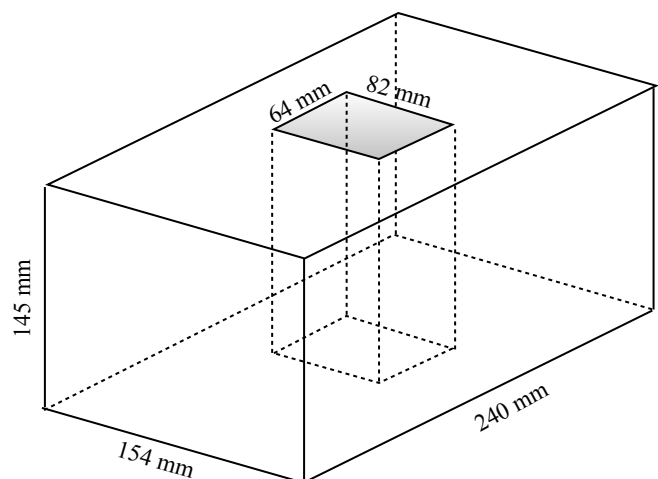
Van een balk is de oppervlakte 1.090 cm^2 . De lengte is 13 cm en de hoogte is 21 cm.

- Bereken de breedte van deze balk (in cm).
- Bereken het volume van deze balk (in cm^3).

Opdracht 4

Hiernaast staat een balk afgebeeld met een rechthoekig gat van boven naar beneden.

Bereken het volume (de inhoud) van de vorm die overblijft.



Opdracht 5

De inhoud van een balk is $533,52 \text{ cm}^3$. De breedte is 12 cm en de hoogte is 57 cm .

- Bereken de lengte van deze balk (in cm).
- Bereken de oppervlakte van deze balk (in cm^2).

Opdracht 6

De inhoud van een kubus is 1.728 cm^3 .

- Bereken de lengte van een ribbe (in cm).
- Bereken de oppervlakte van deze kubus (in cm^2).

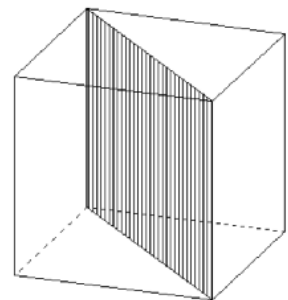
Opdracht 7

De oppervlakte van een kubus is 726 cm^2 .

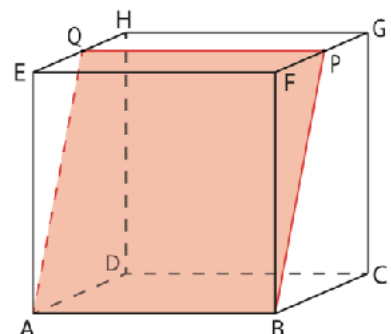
- Bereken de lengte van een ribbe (in cm).
- Bereken de inhoud van deze kubus (in cm^3).

Opdracht 8

De kubus hiernaast heeft een zijde van 12 cm . Bereken de oppervlakte van de gearceerde doorsnede.

**Opdracht 9**

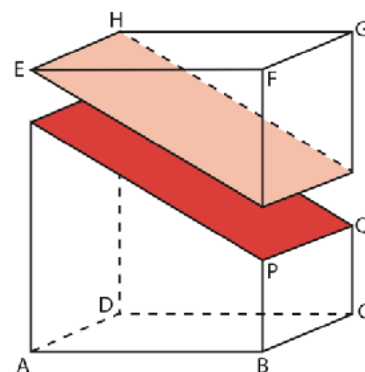
De kubus ABCD.EFGH hiernaast heeft een zijde van 24 cm . Punt P ligt in het midden van FG en punt Q ligt in het midden van EH. Bereken de oppervlakte van doorsnede ABPQ.



Opdracht 10

Van de kubus ABCD.EFGH wordt een stuk 'afgesneden'. De kubus heeft een zijde van 20 cm. De afstand CQ is $\frac{2}{5}$ van de zijde.

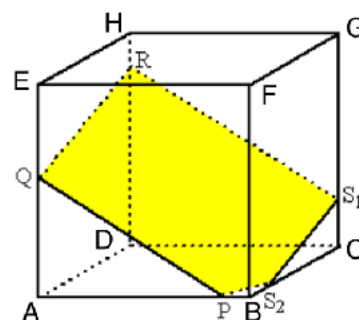
Bereken oppervlakte én inhoud van het stuk dat wordt afgesneden.

**Opdracht 11**

De kubus ABCD.EFGH hiernaast heeft een zijde van 48 cm. Verder zijn de volgende maten gegeven:

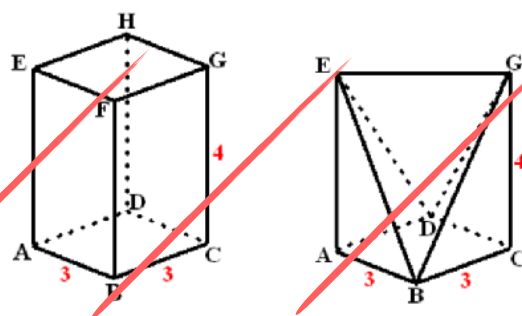
RH = 8 cm, EQ = 24 cm, GS₁ = 40 cm, BS₂ = 6 cm, AP = 42 cm.

Bereken oppervlakte van de gele doorsnede QPS₂S₁R.

**Opdracht 12** Deze opdracht vervalt.

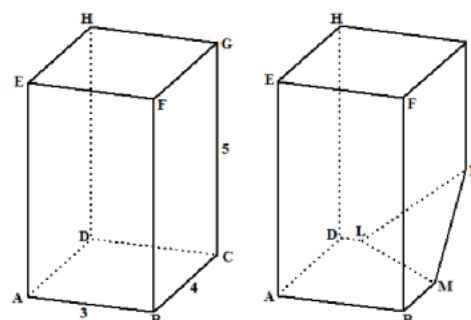
Hiernaast staat een balk afgebeeld, met de afmetingen $3 \times 3 \times 4$ cm. Er wordt van twee kanten een stuk afgesneden, het stuk EGB en het stuk EGD.

Bereken oppervlakte en inhoud van het overgebleven deel.

**Opdracht 13**

Hiernaast staat een balk afgebeeld, met de afmetingen $3 \times 4 \times 5$ cm. Er wordt één schuin stuk afgesneden, het stuk LMN. De afstand DL = 0,6 cm. N is het midden van CG en M is het midden van BC.

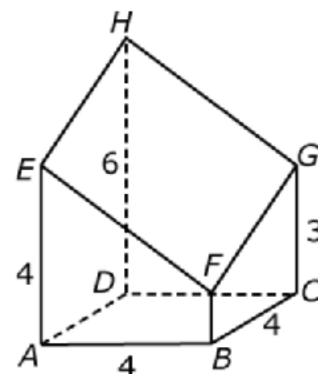
Bereken oppervlakte en inhoud van het overgebleven deel.



Opdracht 14

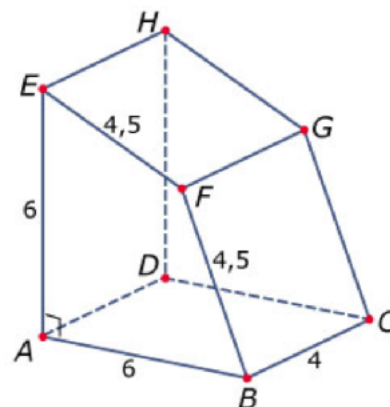
Hiernaast staat een balk afgebeeld, met de afmetingen $4 \times 4 \times 6$ cm. Er wordt één schuin stuk afgesneden, zie afbeelding.

Bereken oppervlakte én inhoud van het overgebleven deel.

**Opdracht 15**

Hiernaast staat een balk afgebeeld, met de afmetingen $6 \times 4 \times 6$ cm. Er worden twee schuine stukken afgesneden, zie afbeelding.

Bereken oppervlakte én inhoud van het overgebleven deel.

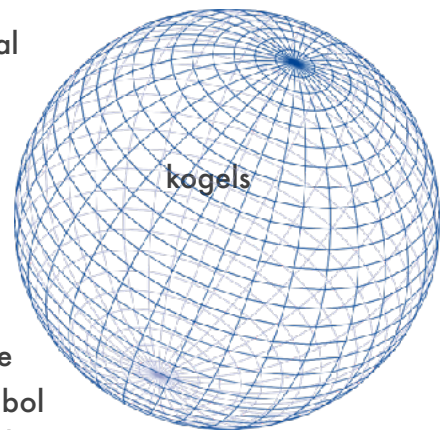


5 Bollen en cilinders

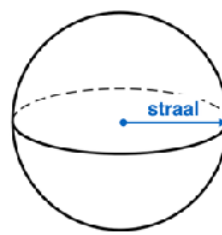
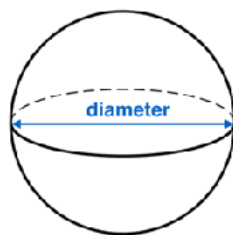
Bol

De bol is een bekende vorm. We komen hem overal tegen. Denk maar aan voetballen, oliebollen, tulpenbollen, kerstballen, gehaktballen enz. In de techniek zie je bollen vaak als stalen of kunststof (bijv in kogellagers, bij transportbanden of als afsluiter van ventielen en kranen) en natuurlijk is de bolvorm ook veel in de bouwkunde toegepast. Maar hoe omschrijf je nou een bol? In de wiskunde gaan we uit van het middelpunt en zeggen dat de bol bestaat uit alle punten die zich binnen een bepaalde afstand tot dat middelpunt bevinden. Die afstand is de straal:

Een bol is de verzameling van alle punten in een driedimensionale ruimte die ten hoogste een gegeven afstand, de straal, liggen van een gegeven punt, het middelpunt van de bol.



Van een bol kunnen we het volume (=de inhoud) en de oppervlakte bepalen. Ook hier zijn steeds weer twee formules mogelijk (met de diameter en met de straal).



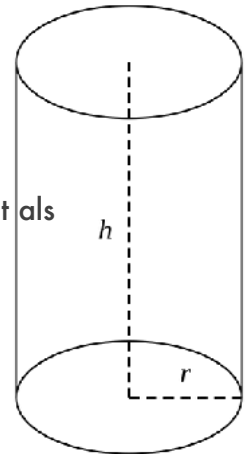
$$\text{Volume. bol} = \frac{1}{6}\pi \cdot D^3 \quad \text{of} \quad \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$\text{Opp. bol} = \pi \cdot D^2 \quad \text{of} \quad 4\pi \cdot r^2$$

Cilinder

Een cilinder heeft een cirkelvormig grondvlak én bovenvlak met daartussen een rechte mantel.

Bij cilinders in de techniek denk je misschien meteen aan een automotor, maar cilinders hebben nog veel meer technische toepassingen: alle buizen en ronde kokers zijn cilindervormig, net als bouten en draadeindes. Je hebt pneumatische en hydraulische cilinders voor de aandrijving van allerlei machines.



In de bouwkunde worden cilinders al sinds het oude Egypte toegepast. Een boomstam of houten kolom is immers ook een cilinder. We kennen de zuilen uit de Griekse en Romeinse tijd, maar tot op de dag van vandaag worden betonnen pilaren in de bouw gebruikt als ondersteuning. Ook bouwwerken zelf zijn soms cilindervormig. Denk maar aan watertorens, of aan de voorbeelden hieronder:



Stoas Vilentum
Hogeschool in
Wageningen



Hoofdkantoor 3M
in Delft

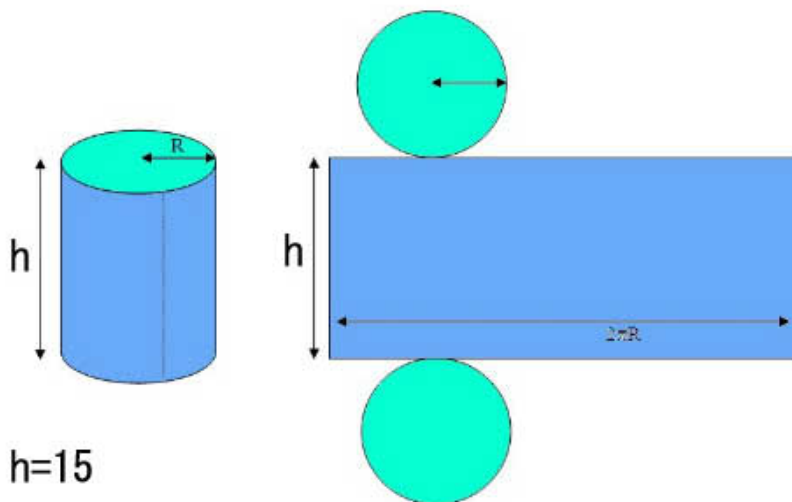


Wolkenkrabber
in Guangzhou, China

Het volume (de inhoud) van een cilinder bereken je als volgt: oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte, dus:

$$\text{Volume cilinder} = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 \times h \quad \text{of} \quad \pi \cdot r^2 \times h$$

De oppervlakte van een cilinder kun je berekenen door de oppervlakte van grondvlak, bovenvlak en mantel bij elkaar op te tellen. De mantel kun je daarbij zien als een rechthoek, waarvan de ene zijde gelijk is aan de hoogte van de cilinder en de andere zijde even lang is als de omtrek van het grondvlak.



De oppervlakte wordt dan:

$$\begin{aligned} & \text{opp. grondvlak} + \text{opp. bovenvlak} + \text{opp. mantel} \\ = & \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 + D \cdot \pi \times h \quad \text{of} \quad \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \times h \end{aligned}$$

Deze formules kunnen we nog compacter schrijven:

$$\text{opp. cilinder} = \pi \left(\frac{1}{2} D^2 + D \cdot h \right) \quad \text{of} \quad 2\pi (r^2 + r \cdot h)$$

Opdrachten

Opdracht 1

Een bol heeft een straal van 24 cm.

- a) Bereken de oppervlakte van deze bol (in cm^2).
- b) Bereken de inhoud van deze bol (in cm^3).

Opdracht 2

Een bol heeft een diameter van: 3 m.

- a) Bereken de oppervlakte van deze bol (in m^2).
- b) Bereken de inhoud van deze bol (in m^3).

Opdracht 3

De inhoud van een bol is 11.494 cm^3 .

- a) Bereken de straal van deze bol (in cm).
- b) Bereken de diameter van deze bol (in cm).

Opdracht 4

De oppervlakte van een bol is $1.493,0 \text{ cm}^2$.

- a) Bereken de straal van deze bol (in cm).
- b) Bereken de diameter van deze bol (in cm).

Opdracht 6

Bij benadering is de aarde bolvormig. De lengte van de evenaar is ongeveer 40.000 km. Ongeveer 70% van de aarde is bedekt door water.

Bereken de oppervlakte van het land in km^2 .

Opdracht 6

Een fabriek van kunststof kogels wil de producten in dozen vervoeren. Ze proberen verschillende methodes uit. Hiernaast staat een voorbeeld van een stapelmethode.

De kogels hebben een diameter van 22 mm.

- Hoeveel kogels zijn hier opgestapeld?
- Als ze een kartonnen doos zouden bestellen waar deze stapel precies in past, wat zijn dan de binnenafmetingen van deze doos (in mm)?
- Bereken hoeveel lucht er overblijft in de doos als de kogels er op deze manier ingestapeld worden (in cm^3).

**Opdracht 7**

Een bolvormige watertank kan 500 m^3 water bevatten. De tank wordt met een isolerende laag bekleed. Hoeveel m^2 isolatiemateriaal is nodig?

Opdracht 8

Een conservenblik heeft een diameter van 10 cm en is 12,7 cm hoog

- Bereken de oppervlakte van het blik (in cm^2).
- Bereken de inhoud van het blik (in cm^3).

Opdracht 9

Een pneumatische cilinder heeft een inhoud van 750 cm^3 en is 15 cm hoog

- Bereken de straal van de bodem (in cm).
- Bereken de oppervlakte van buitenkant van de cilinder (in cm^2).

Opdracht 10

Een stuk draadeinde heeft een inhoud van 190 cm^3 en een diameter van 22 mm. Bereken de lengte van het draadeinde (in cm).

Opdracht 11

Autofabrikant BMW produceert onder andere een 6-cilinder benzinemotor van 3 liter, genaamd B58. De zes cilinders van deze motor hebben in werkelijkheid een gezamenlijke inhoud van 2998 cc; dus 2,998 liter. De slag die een zuiger maakt bij deze motor is 94,6 mm (zie foto hieronder). Deze slag mag je beschouwen als de hoogte van één cilinder.

Bereken de diameter van de cilinders in deze motor (*in mm met één decimaal*).



Opdracht 12

De Ericsson Globe in Stockholm (Zweden) is een evenementenhal waar voornamelijk ijshockeywedstrijden en concerten worden georganiseerd. Er is plek voor ruim 16.000 mensen. De Globe is het grootste bolvormige gebouw ter wereld met een diameter van 110 meter. Het gebouw is ook bekend van het Eurovisie Songfestival (2000 en 2016).

Ontwerp: Berg Arkitektkontor, 1989.

Bereken de inhoud van deze arena (in m^3 met één decimaal).



Opdracht 13

De Rotterdamse baan komt - gek genoeg - te liggen in Den Haag. Het wordt een verbindingsweg tussen het centrum van Den Haag en de snelweg naar Rotterdam.

De Rotterdamse baan bestaat voor een deel uit een geboorde tunnel. Deze tunnel gaat de Victory Boogie Woogie-tunnel heten. Door te boren in plaats van te graven, is er veel minder overlast voor de omgeving tijdens de bouw van de tunnel.



Op de afbeeldingen zie je de boormachine waarmee de tunnel geboord wordt. De diameter van de boormachine is 10 meter. Per dag kan deze boormachine ca. 15 m tunnel uitboren.

Het materiaal dat weggeboord wordt, moet met zeven vrachtwagens van 24m^3 worden afgevoerd.

Bereken hoe vaak iedere vrachtwagen per dag moet rijden, als ze alle zeven evenveel ritten maken.



Opdracht 14

Op een camping in Sellingen wil men een gastank plaatsen bij het toiletgebouw. De campingeigenaar weet dat de tank een diameter heeft van 90 cm en een inhoud van 1950 liter ($=1.950.000 \text{ cm}^3$).

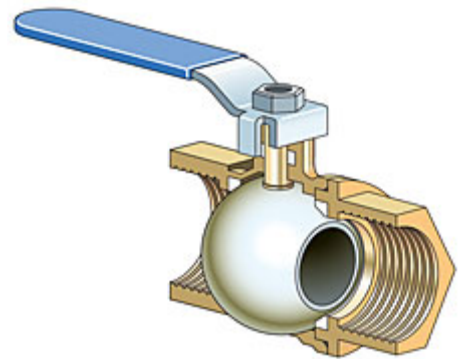
Je mag de beide uiteinden van de gastank beschouwen als halve bollen.

Bereken de totale lengte van de gastank (in cm).



Opdracht 15

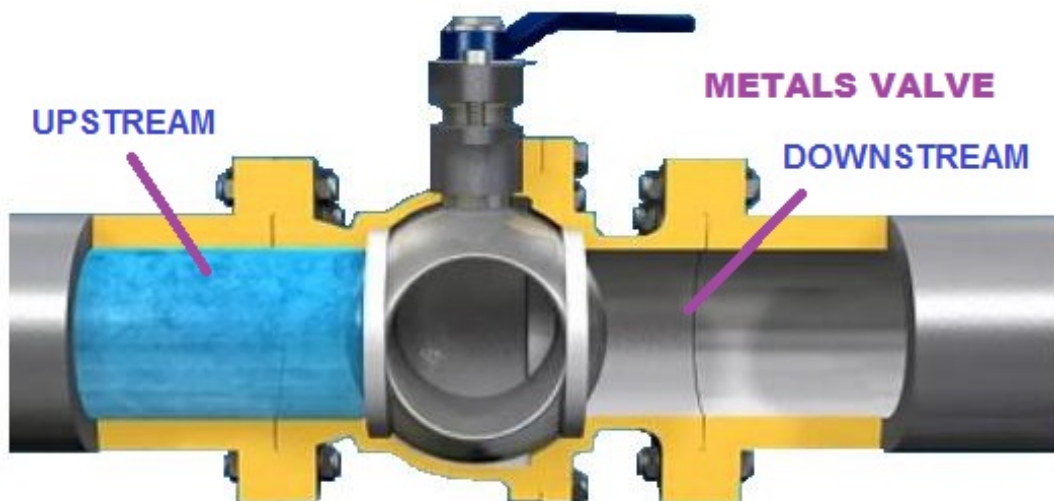
Een kogelventiel (of afsluitkraan) bestaat o.a. uit een ronde kogel, waar een groot gat in zit. Door deze kogel te draaien, kan de stroom in een leiding geblokkeerd of doorgelaten worden.



Een leverancier geeft de volgende informatie over een waterafsluiter in een 'halfduims leiding':

- Doorsnede waterleiding: $1/2''$ of 12,7 mm.
- Kogeldiameter: 22,3 mm
- Doorsnede van de doorlaatopening: 13,0 mm
- Lengte van de doorlaatopening in de kogel: 19,0 mm.

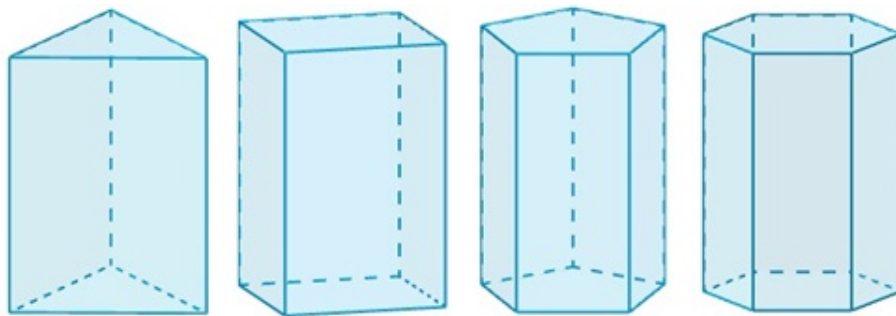
Bereken het volume van de 'kogel met gat' in deze waterafsluiter.



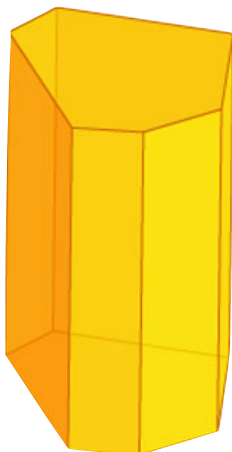
6 Prisma's

Prisma

Een prisma is een ruimtelijk figuur, waarvan het grondvlak en het bovenvlak gelijk en evenwijdig aan elkaar zijn. Een prisma kan bijvoorbeeld een driehoek of rechthoek als grond-/bovenvlak hebben, maar ook een veelhoek en zelfs een onregelmatig veelvlak.



prisma's met regelmatige grond-/bovenvlakken.



prisma met onregelmatig grond-/bovenvlak.

Van een prisma kunnen we het volume (=de inhoud) bepalen met de volgende formule:

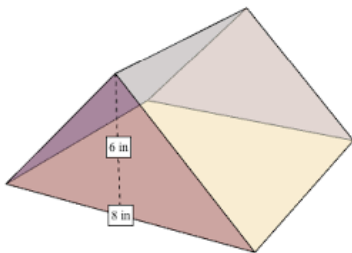
$$\text{inhoud prisma} = \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}$$

De oppervlakte van een prisma bereken je door de oppervlaktes van de verschillende zijden bij elkaar op te tellen. Er is geen standaardformule voor:

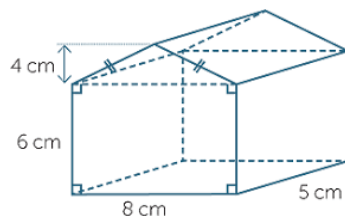
$$\text{oppervlakte prisma} = \text{alle oppervlaktes bij elkaar optellen}$$

Grondvlak

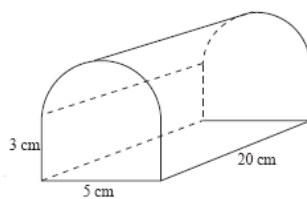
Een prisma 'staat' niet altijd op zijn grondvlak. Kijk maar eens naar de volgende prisma's:



Een prisma met een driehoekig grond- en bovenvlak.



De vorm van een huis is ook een prisma. Het grondvlak is de voorgevel en het bovenvlak is de achtergevel.



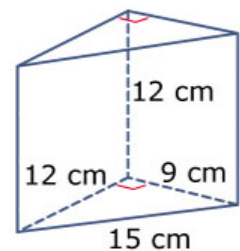
Ook dit is een prisma. Het grond- en bovenvlak zijn de tunnelvormen.

Opdrachten

Opdracht 1

Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een rechthoekige driehoek. De afmetingen staan aangegeven in het plaatje hiernaast.

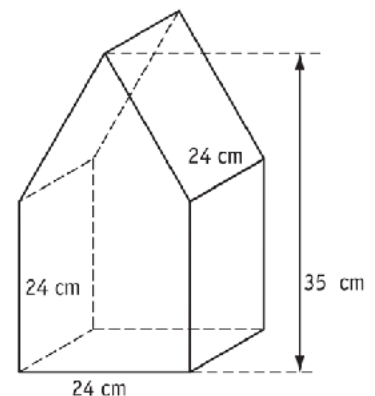
- Bereken de oppervlakte van dit prisma (in cm^2).
- Bereken de inhoud van dit prisma (in cm^3).



Opdracht 2

Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een gevel. De afmetingen staan aangegeven in het plaatje hiernaast.

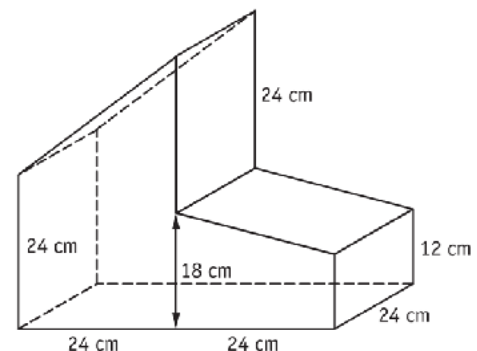
- Bereken de oppervlakte van dit prisma (in cm^2).
- Bereken de inhoud van dit prisma (in cm^3).



Opdracht 3

Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een gevel. De afmetingen staan aangegeven in het plaatje hiernaast.

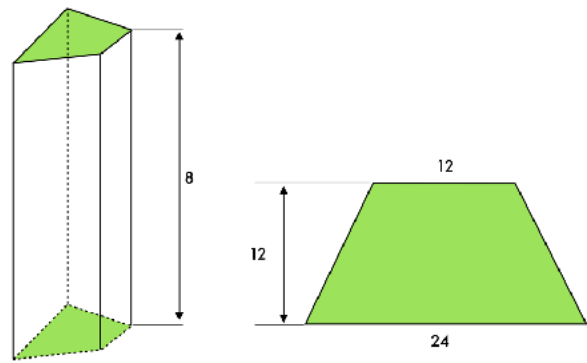
- Bereken de oppervlakte van dit prisma (in cm^2).
- Bereken de inhoud van dit prisma (in cm^3).



Opdracht 4

Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een trapezium. De afmetingen staan aangegeven in het plaatje hiernaast.

- Bereken de oppervlakte van dit prisma (in cm^2).
- Bereken de inhoud van dit prisma (in cm^3).

**Opdracht 5**

Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een ruit. Eén diagonaal van die ruit is 32 cm lang. De hoogte van het prisma is 56 cm. De inhoud van het prisma is 21.504 cm^3 .

- Maak een schets van dit prisma.
- Bereken de tweede diagonaal van de ruit (in cm).
- Bereken een zijde van de ruit (in cm).

Opdracht 6

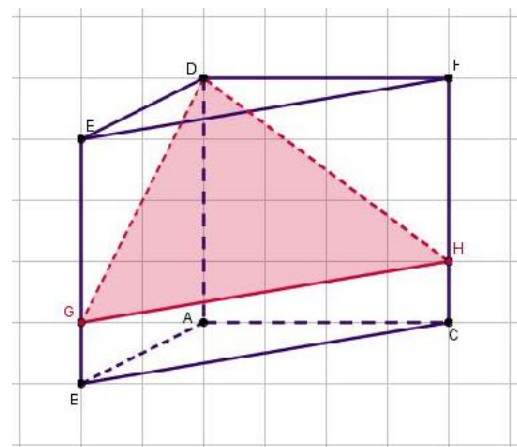
Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een driehoek. De volgende maten zijn bekend:

$$AB=AC=DE=DF=BE=AD=CF=4$$

$$BC=EF=7$$

$$BG=CH=1$$

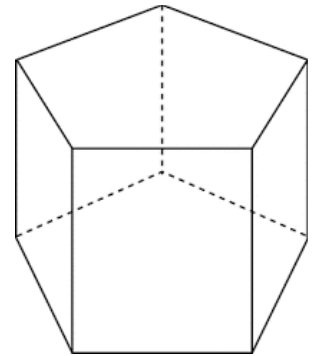
Bereken de oppervlakte van driehoek GHD (in cm^2).



Opdracht 7

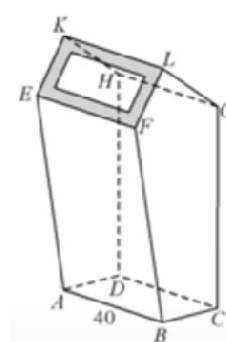
Een prisma heeft een grond- en bovenvlak in de vorm van een vijfhoek (pentagon). De straal van de omgeschreven cirkel van de vijfhoek is 20. De hoogte van het prisma is 50.

- Bereken de oppervlakte van dit prisma (in cm^2).
- Bereken de inhoud van dit prisma (in cm^3).

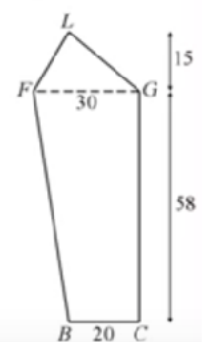
**Opdracht 8**

Bereken de inhoud van de vuilnisbak (in liter).

figuur 1



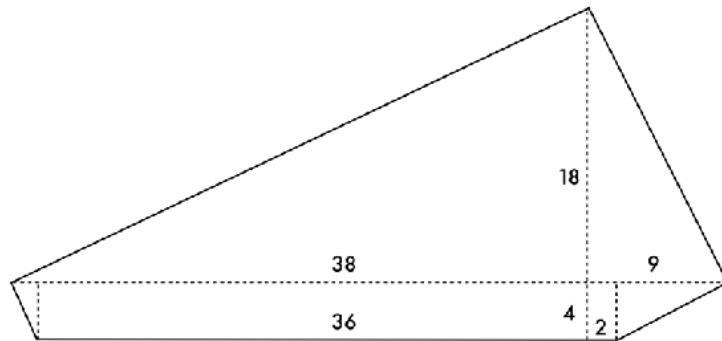
figuur 2

**Opdracht 9**

Op de foto's zie je het 'International Office' van de universiteit van Nottingham in Groot Brittannië. Het gebouw is 20 meter breed. De overige maten staan in de tekening.

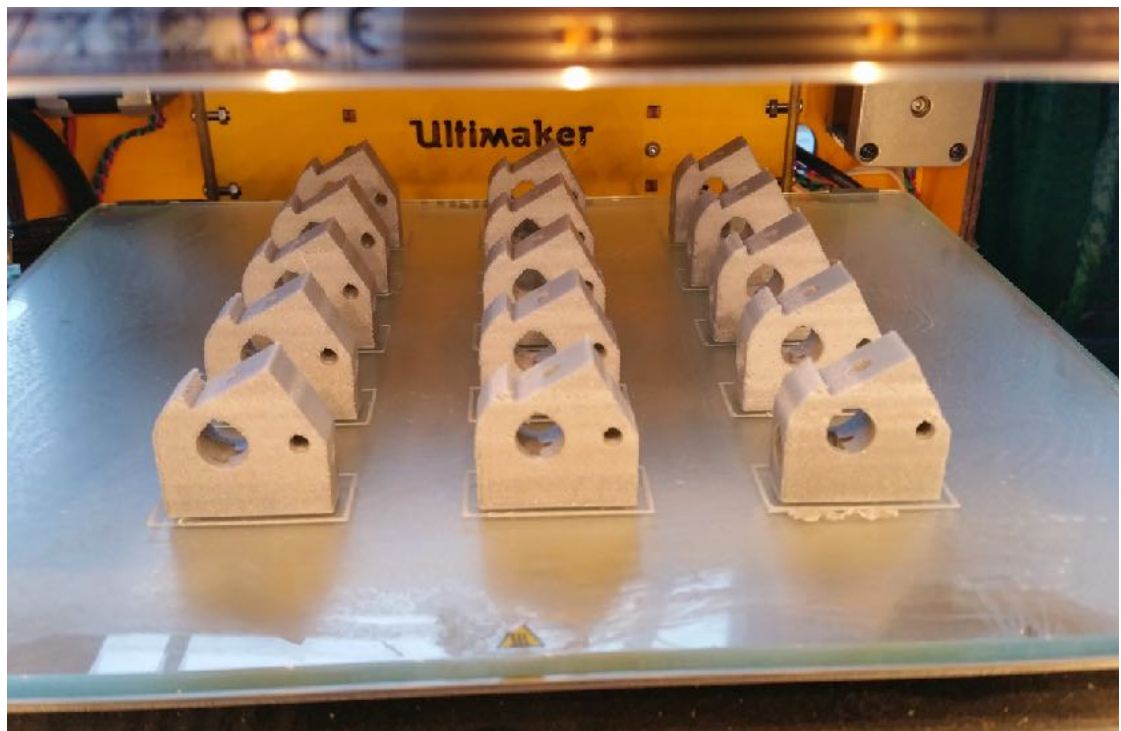
Bereken de inhoud van dit gebouw (in m^3)





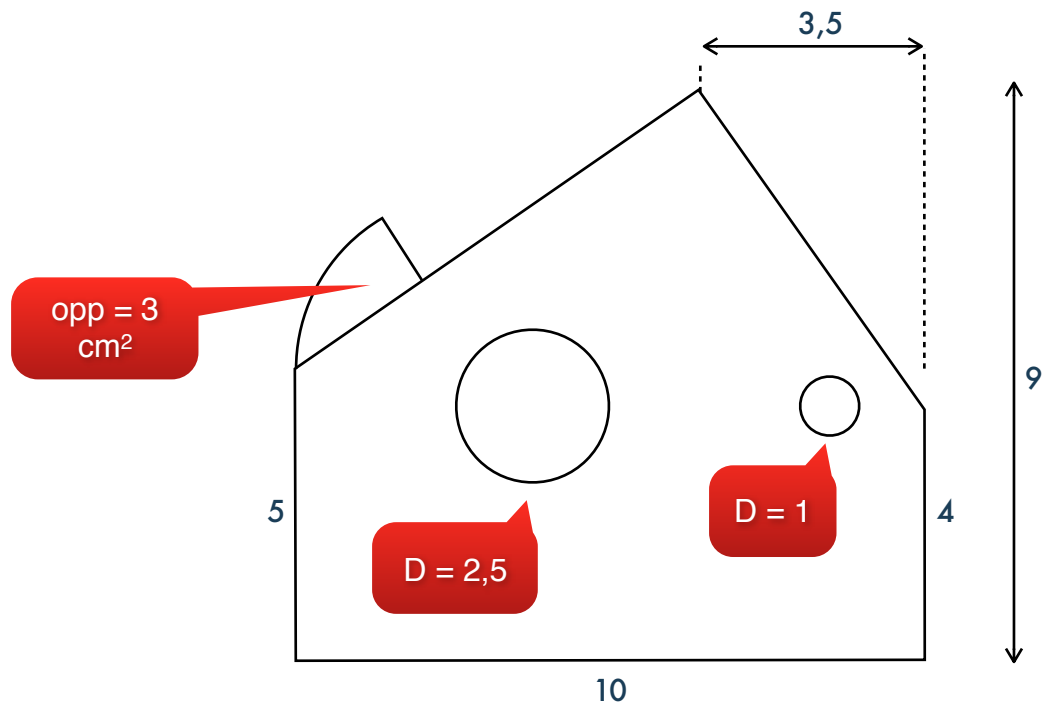
Opdracht 10

Op de foto zie je een werkstuk dat met een 3D-printer gemaakt is. Ook dit werkstuk heeft de vorm van een prisma. In de tekening zie je een vereenvoudigde vorm van dit werkstuk. De dikte van het werkstuk is 4 cm.



Bereken de inhoud van dit werkstuk (in cm^3)

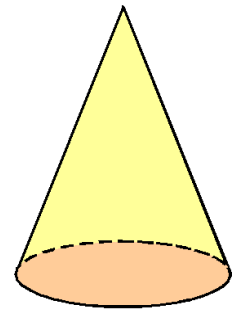
Neem in je berekening alleen de gaten mee die in het grond-/bovenvlak zichtbaar zijn.



7 Kegels en piramides

Kegel

Een kegel is een ruimtelijk figuur dat bestaat uit een cirkelvormig grondvlak, één punt boven dat grondvlak en een mantel. De mantel wordt gevormd door alle lijnstukken die de cirkelrand met het punt verbinden.



Inhoud

De inhoud van een kegel bereken je als volgt: $\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{opp. grondvlak} \times \text{hoogte}$. De oppervlakte van het grondvlak is de oppervlakte van een cirkel, dus πr^2 (of $\frac{1}{4}\pi D^2$). Zo wordt de uiteindelijke formule (met de straal):

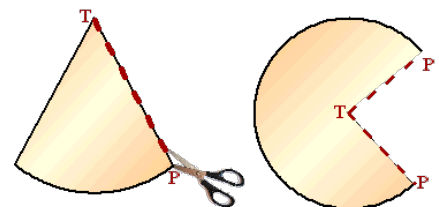
$$\text{inhoud kegel} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

De formule met de diameter luidt als volgt:

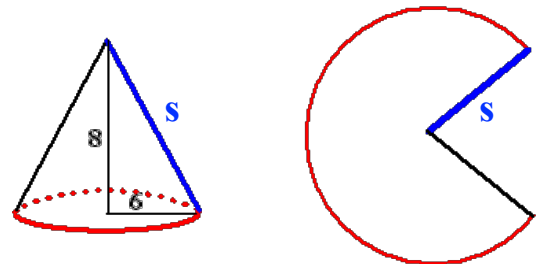
$$\text{inhoud kegel} = \frac{1}{12} \pi D^2 \times h$$

Oppervlakte

De mantel van een kegel is het gekromde oppervlak ervan. De oppervlakte ervan kun je het best berekenen door hem uit elkaar te knippen, bijvoorbeeld langs de stippellijn PT hiernaast.



Als je dat doet, dan krijg je een cirkelsector (zie hoofdstuk 3). We gaan nu op een nieuwe manier de oppervlakte van die cirkelsector berekenen:



1. De lengte van de blauwe lijn s
hiernaast vinden met behulp van Pythagoras: $s = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
2. De (rode) omtrek van het grondvlak van de kegel is $2\pi r$, dus $2\pi 6$.
3. De omtrek van de grote cirkel (als er geen hap uit was) is $2\pi r$, dus $2\pi 10$.
4. De cirkelsector bestaat daarom uit $\frac{2\pi 6}{2\pi 10}$ deel van de grote cirkel. Die verhouding kunnen we eenvoudiger schrijven, namelijk: $\frac{6}{10}$.
5. De oppervlakte van de mantel van een kegel is te zien als de oppervlakte van een cirkelsector. De straal van de grote cirkel is gelijk aan de schuine zijde van de kegel en de oppervlakte is gelijk aan het volgende deel van de oppervlakte van die grote cirkel: $\frac{\text{straal kegel}}{\text{schuine zijde kegel}} = \frac{r}{s}$.
6. De oppervlakte van de cirkelsector wordt daarom: $\frac{r}{s} \times \pi s^2 = \frac{r}{s} \times \pi \cdot s \cdot s = \pi \cdot r \cdot s$
7. Voor de totale oppervlakte van de kegel tellen we daar de oppervlakte van het grondvlak nog bij op.

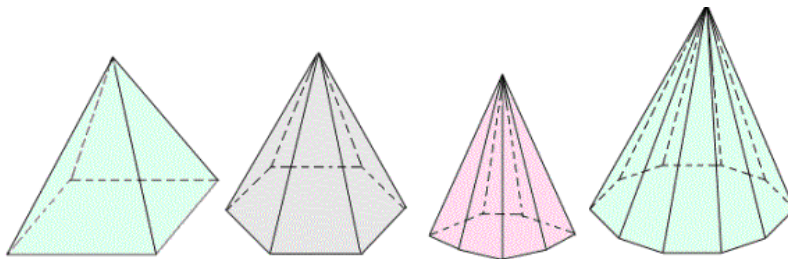
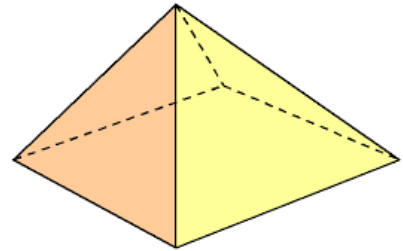
$$\text{Oppervlakte kegel} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

De formule met de diameter luidt als volgt:

$$\text{Oppervlakte kegel} = \frac{1}{4} \pi D^2 + \frac{\frac{1}{8} \pi D^3}{s}$$

Piramide

Een piramide is een ruimtelijk figuur dat bestaat uit een veelhoek als grondvlak, één punt (de top) boven dat grondvlak en de verbinding tussen alle hoeken van het grondvlak met de top. De zijvlakken van een piramide zijn altijd driehoeken.



Piramides met verschillende veelhoeken als grondvlak.

Inhoud

De inhoud van een piramide bereken je, net als bij de kegel, als volgt:

$$\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \times \text{opp.grondvlak} \times h$$

Hoe je de oppervlakte van het grondvlak berekent is afhankelijk van welke vorm die heeft. Zie ook hoofdstukken 1 en 2.

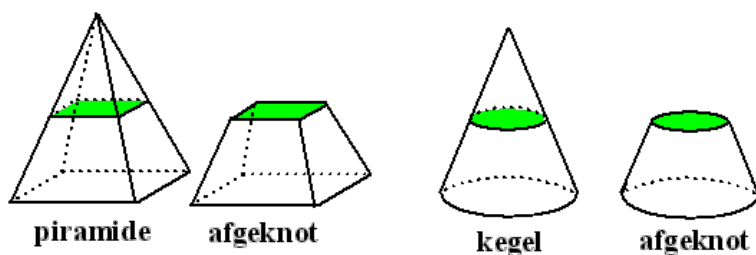
Oppervlakte

Voor de oppervlakte van een piramide moet je de oppervlaktes van alle zijden optellen bij de oppervlakte van het grondvlak..

$$\text{oppervlakte piramide} = \text{opp.grondvlak} + \text{opp. alle zijden}$$

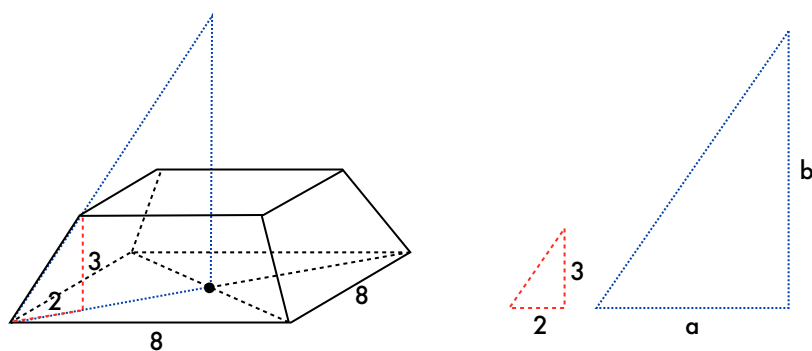
Afgeknotte kegel of piramide

Als je het topje van een kegel of piramide afhaalt, krijg je een afgeknotte kegel of piramide. De inhoud daarvan kun je berekenen door de inhoud van het topje af te trekken van de inhoud van de oorspronkelijke vorm.



Verhoudingen

In een kegel en piramide vind je steeds dezelfde verhoudingen. Zo kun je uit onderstaande gegevens de oorspronkelijke hoogte van de piramide bepalen.



a is te berekenen met Pythagoras: $a = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{128} \approx 5,7$

De verhouding 2 op 3 van de kleine driehoek pas je toe op de grote driehoek.

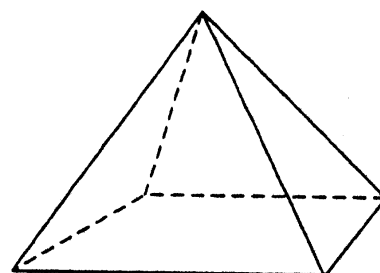
b wordt daarom: $b = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{128}}{2} \times 3 = \frac{3}{4}\sqrt{128} \approx 8,5$

Opdrachten

Opdracht 1

Hiernaast staat een regelmatige vierzijdige piramide met (dus) een vierkant grondvlak. De hoogte van deze piramide = 15 cm. De inhoud van de piramide = 980 cm^3 .

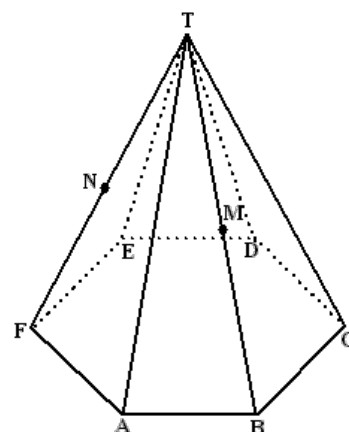
- Bereken de zijde van het grondvlak (in cm).
- Bereken de oppervlakte van de piramide (in cm^2).



Opdracht 2

In de figuur hiernaast is de regelmatige zeszijdige piramide T.ABCDEF getekend. Gegeven is verder dat $AB = 6 \text{ cm}$ en dat de afstand van T tot het grondvlak ABCDEF gelijk is aan: $6\sqrt{3} \text{ cm}$.

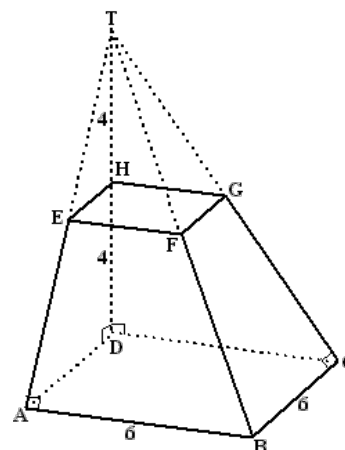
- Bereken de totale oppervlakte van de piramide (in cm^2).
- Bereken de inhoud van de piramide (in cm^3).



Opdracht 3

Gegeven is de piramide T.ABCD. Het grondvlak ABCD van deze piramide is een vierkant met zijde 6. De top T ligt recht boven D. De hoogte van de piramide is dus gelijk aan de lengte van DT. Deze is 8. De piramide wordt afgeknot op hoogte 4. Hierdoor ontstaat de afgeknotte piramide ABCD.EFGH. Zie figuur.

Bereken de totale oppervlakte van de afgeknotte piramide ABCD.EFGH

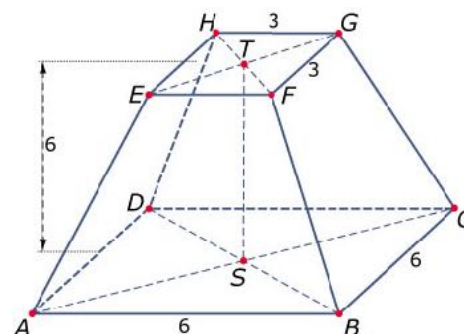


Opdracht 4

Je ziet hier een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.

Gegeven is: $AB=6$ cm, $EF=3$ cm en $ST=6$ cm.

Bereken de totale oppervlakte van de afgeknotte piramide

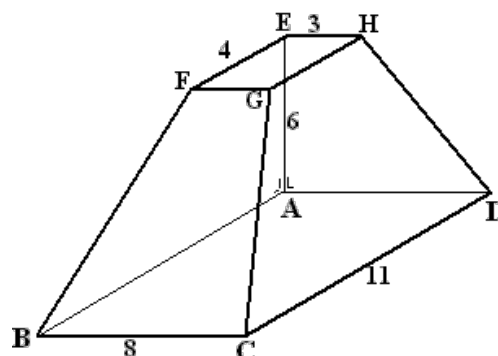
**Opdracht 5**

Hiernaast staat een ruimtelijke figuur $ABCD.EFGH$. Het grondvlak is een rechthoek van 8 bij 11, het bovenvlak een rechthoek van 3 bij 4.

Grondvlak en bovenvlak zijn evenwijdig.

Punt E ligt recht boven A.

AE heeft lengte 6

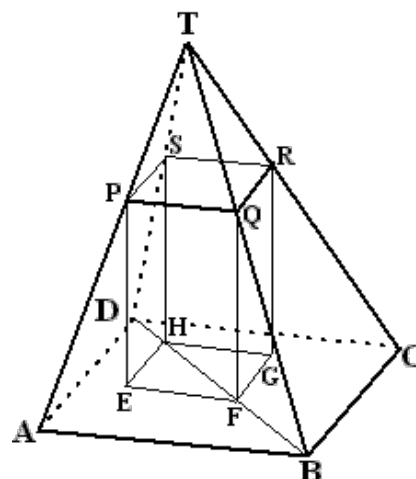


- Bereken de lengte van FD .
- Teken vlak $ACGE$, en bereken daarmee de hoek die AG en EC met elkaar maken.
- Is de figuur hiernaast eigenlijk wel een afgeknotte piramide? Verklaar je antwoord.

Opdracht 6

De hoogte van de piramide hiernaast is 12 en top T ligt recht boven het midden van grondvlak $ABCD$, dat vierkant is met zijde 6. $PQRS$ is ook vierkant, ligt evenwijdig aan grondvlak $ABCD$ en ligt op hoogte 8 (dus 4 onder T).

Bereken de inhoud van balk $EFGH.PQRS$.

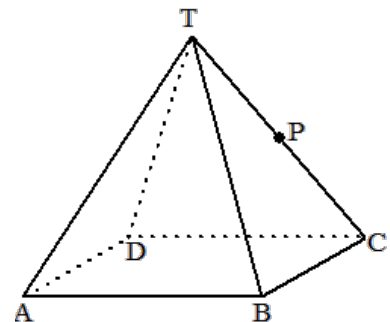


Opdracht 7

In een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ zijn alle ribben even lang.

Het midden van de ribbe CT is het punt P .

Bereken $\angle BPD$ (dat is de hoek bij P in driehoek BPD).

**Opdracht 8**

Jolanda gaat voor haar verjaardagsfeestje hoedjes maken uit vierkante kartonnen vellen in mooie gemengde kleuren. Ze wil dat de hoedjes de vorm van een kegel krijgen met hoogte 24 cm en de straal van de grondcirkel 6 cm. Ze tekent daarvoor een cirkel op haar vierkante stuk papier met het middelpunt in het midden van het papier, en knipt er vervolgens een hap uit.



- Hoe groot moet de zijde van een kartonnen vel minstens zijn?
- Als de vellen een minimale afmeting hebben, hoeveel procent van het karton gooit Jolanda dan uiteindelijk weg?

Opdracht 9

Een Chinese hoed heeft vaak de vorm van een kegel. De hoogte van de kegel is 18 cm. De onderrand heeft een omtrek van 70 cm. Bereken de oppervlakte van de hoed.

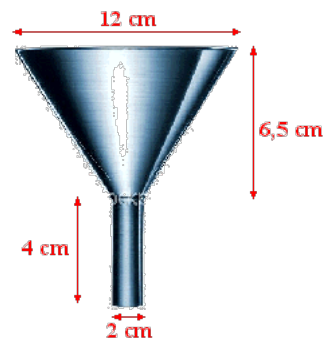
**Opdracht 10**

Het popcorn-bekertje hiernaast heeft een hoogte van 20 cm en een inhoud van 0,5 liter.



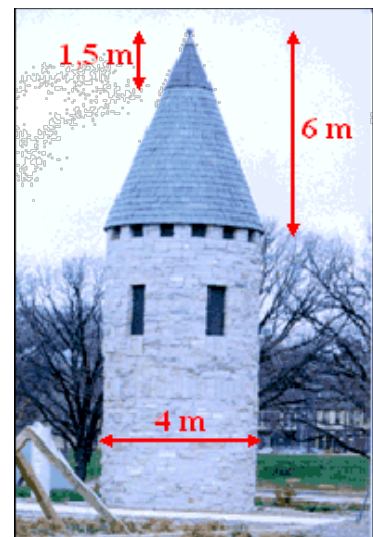
Opdracht 11

Een metalen trechter heeft afmetingen als in de figuur hiernaast. Bereken in één decimaal nauwkeurig de totale buitenoppervlakte van deze trechter.

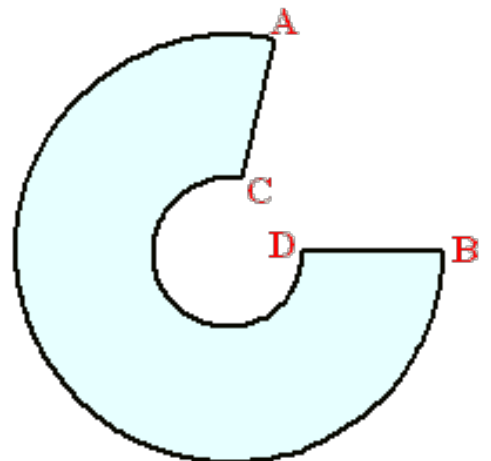
**Opdracht 12**

Het dak van het leuke torentje hiernaast (het staat trouwens in Bettendorf) heeft de vorm van een kegel. Het is bedekt met blauwe dakpannen. De afmetingen zijn als hiernaast.

De oppervlakte van één dakpan is 400 cm^2 . Bereken hoeveel dakpannen zijn gebruikt (neem aan dat het allemaal mooi in elkaar past, en rond af op gehele aantallen).

**Opdracht 13**

Als huisdieren een wond hebben waar ze niet aan mogen bijten of likken dan krijgen ze van de dierenarts een plastic kraag om. De kraag heeft de vorm van een afgeknotte kegel, en als je hem uit elkaar vouwt krijg je de figuur rechts. Voor een bepaalde kraag geldt: $AC = BD = 20 \text{ cm}$ en cirkelomtrek $AB = 125 \text{ cm}$ en cirkelomtrek $CD = 35 \text{ cm}$



- Bereken de oppervlakte van de kraag.
- Bereken de hoogte van de afgeknotte kegel in gehele centimeters.

Opdracht 14

Tommy Cooper was een beroemde Britse komiek, vooral herkenbaar door zijn fez: dat is dat malle petje hiernaast. De diameter van de onderkant is 18 cm, en de diameter van de bovenkant is 12 cm.

Verder is de hoogte van de fez ook gelijk aan 12 cm. Bereken de gekromde oppervlakte van de fez.

